

Р. Джекив и Э.Шимони

## ДЖОН БЕЛЛ И ЕГО ТЕОРЕМА

-----

От переводчика:

Предлагаю вниманию читателя перевод первой половины статьи **“The Depth and Breadth of John Bell’s Physics”** (авторы **R. Jackiw** и **A. Shimony**, arXiv:physics/0105046 v2 14 Jun 2001). При переводе опущены анализ взаимоотношений результатов Белла с известными проблемами квантовой механики и обзор работ Белла в области теории ускорителей и алгебры токов, а также соответствующая часть библиографических ссылок.

Читателю, желающему хорошо понять доказательство (обобщенных) неравенств Белла, а также обстоятельно вникнуть в методы и историю экспериментальной проверки нелокальности квантовой механики, я настоятельно рекомендую замечательно ясную статью классика этого направления Алэна Аспека, доступную (в моем переводе) по ссылке [http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/aspek\\_teorema\\_bella.pdf](http://www.chronos.msu.ru/RREPORTS/aspek_teorema_bella.pdf), где, кроме того, приводится интересное и трогательное воспоминание о первой встрече Аспека с Беллом. Упомянутое доказательство я также воспроизвожу в моей собственной статье “Почему нелокальна квантовая механика?”, которая должна быть опубликована одновременно с настоящим переводом на этом же сайте [www.chronos.msu.ru](http://www.chronos.msu.ru).

М.Х.Шульман, 5.11.2006

-----

### 1. Краткая биография

Джон Стюарт Белл (1928–90) родился в Белфасте, в северной Ирландии. Его родителями были Джон Белл и Элизабет Мэри Энн Белл (урожденная Броунли, ее всегда звали “Анни”). Уже несколько поколений их семей жили в северной Ирландии. Его среднее имя – Стюарт – было шотландским по линии его матери, и пока он не поступил в университет, это имя было в ходу.

Семья принадлежала к англиканской (ирландской) церкви, но это не мешало их общению с католическим сообществом. Семья Белла принадлежала к рабочему классу, но была высоко образованной. Хотя только Джон остался в школе после четырнадцати лет, все его младшие братья продвинулись по общественной лестнице, один (вернувшийся к учебе после женитьбы и появления детей) стал преподавателем электротехники, а другой – успешным предпринимателем.

В одиннадцать лет Джон, активно посещавший публичную библиотеку, объявил о желании стать ученым. Он очень хорошо подготовился к поступлению в школу следующей ступени (secondary education), однако семья могла послать его лишь в высшую техническую школу Белфаста, которая – с пользой для его последующей карьеры – предлагала как практический, так и академический курсы обучения.

Окончив эту школу в 1944 году в возрасте шестнадцати лет, Белл нашел работу в качестве младшего технического ассистента (a junior technical assistant) в Физическом Департаменте Королевского Университета в Белфасте, его руководителями стали профессор Karl Emeleus и доктор Richard Sloane. Они заметили его талант, снабжали его книгами и позволили ему прослушать лекционный курс первого года обучения, хотя

формально он не был студентом. После года пребывания ассистентом он стал студентом и стал приобретать знания, получив в 1948 году степень почетного бакалавра первого класса в области экспериментальной физики (a first class Honours BSc in Experimental Physics). Он остался затем еще на один год, получив в 1949 году степень почетного бакалавра первого класса в области теоретической физики (a first class Honours BSc in Mathematical Physics). Белл считал, что ему повезло иметь в качестве первого учителя теоретической физики Peter Paul Ewald, уехавшего из нацистской Германии и бывшего одним из пионеров в области рентгеновской кристаллографии. Хотя Белл получил хорошую базовую подготовку в физике, его не удовлетворяли “объяснения” квантовой механики по причинам, которые будут подробно в разделе. 2. Вообще, он стал необычайно способным и усердным студентом, демонстрирующим любознательность, настойчивость и независимость ума, что предвещало его более поздние выдающиеся достижения.

С середины 1949 до 1960 года Белл работал в Англии, главным образом в Атомном исследовательском центре в Харуэлле в Великобритании (UK Atomic Energy Research Establishment - A.E.R.E. - at Harwell). Вначале он работал там в течение двух месяцев над реакторной проблематикой, затем позднее в 1949 г. пришел в Малверн (Malvern) для сотрудничества с группой, работавшей на ускорителе, но вернулся в Харуэлл в 1951 г., продолжив работу, относящуюся к ускорителям и исследованиям в области ядерной физики. В Харуэлле 1949 г. Джон Белл впервые встретил свою будущую жену Мэри Росс (Mary Ross). Но в это время она уже в течение нескольких лет работала над реакторной проблематикой. Позже, в 1950 г., она также начала сотрудничать с группой, работавшей на ускорителе в Малверне. Это был ее второй период пребывания в Малверне – во время 2-й мировой войны она приняла участие в работе над радаром в T.R.E. в Малверне. Когда война закончилась, она вернулась в Глазго для прохождения докторантуры по физике и математике, а затем (раньше его) в 1947 г. появилась в Харуэлле. Они поженились в 1954 г. и продолжали свою карьеру вместе, часто сотрудничая в исследованиях, сначала в Харуэлле, а позже – в ЦЕРНе, вплоть до кончины Белла в 1990 г.

Волнующим для нее стало признание в последнем параграфе предисловия к сборнику работ Джона Белла “Произносимое и умалчиваемое в квантовой механике (Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics [5]): “В отдельных работах я благодарил многих коллег за их помощь. Но здесь я хочу выразить мою особенно горячую благодарность Мэри Белл. Вглядываясь в эти работы, я везде замечаю ее присутствие.”

Джон Белл получил оплаченный отпуск в 1953 и 1954 годах для продолжения обучения в Физическом Департаменте Университета в Бирмингеме под руководством Пола Мэттью (Paul Matthews) и Рудольфа Пайерса (Rudolf Peierls) и защитил докторскую диссертацию в 1956 г. после возвращения в Харуэлл. В Бирмингеме Белл быстро приобрел знания в текущих исследованиях по теоретической физике, включая квантовую теорию поля, и в его докторскую диссертацию вошло доказательство СРТ-теоремы, однако он утратил приоритет вследствие того, что Людериц опубликовал доказательство теоремы раньше его собственной работы [1], появившейся в Proceedings of the Royal Society. В качестве члена ядерной группы Tony Skyrme в Харуэлле он выполнил много эффективных прикладных исследований по теории поля и теории симметрий в ядерных проблемах [2, 3, 4].

В поздние пятидесятые годы Джон и Мэри Белл были обеспокоены тем, что в Харуэлле уменьшилась заинтересованность в фундаментальных физических исследованиях, и они начали искать работу в каком-нибудь другом месте. В 1960 г. они покинули свои должности и перешли на работу в ЦЕРН, он – в Теоретический Отдел (Theory Division), она – в Исследовательскую Группу, работающую на Ускорителе

(Accelerator Research Group). Жили они в Женеве. Рабочие часы Белла в ЦЕРНе были посвящены в первую очередь теоретической физике частиц.

Он шутливо характеризовал свою специальность в официальных документах ЦЕРНа как “квантовая инженерия (quantum engineering).” Часть его свободного времени была отдана основаниям квантовой механики, он называл это своим “хобби”. Год отлучки (1963–1964), проведенный в Стенфордском Центре Линейных Ускорителей, Университете Висконсина и в Университете Brandeis, дал ему время написать две пионерские статьи [6, 7] по основаниям квантовой механики. Работа [6] продемонстрировала конфликт (относящийся к наблюдаемым величинам) между классом теорий с локальными скрытыми переменными и квантовой механикой. Этот знаменитый результат стал известен как “теорема Белла” (см. ниже раздел 2).

Вернувшись в ЦЕРН, Белл по своей инициативе продолжал исследования в области оснований квантовой механики, однако его профессиональная деятельность относилась к области физики частиц, в основном в рамках популярной тогда схемы алгебры токов. Благодаря этим исследованиям в области алгебры токов Белл установил свой знаменитый результат об аномальном несохранении тока аксиального вектора, основанный на аномальном нарушении хиральной симметрии [8].

Признание Джона Белла как выдающегося ученого сложилось постепенно. В ранние пятидесятые его достижения в Малверне по разработке ускорителя, основанные на его исследовании динамики и электромагнитной теории частиц, широко изучались; в 25-летнем возрасте он был консультантом, когда организовался ЦЕРН. С того времени, когда Белл закончил учебу в Бирмингеме, он пользовался высокой репутацией среди специалистов по теории частиц, которая росла и распространялась по всему миру после того, как он начал работать в Теоретической Группе в ЦЕРНе. Однако его работа по основаниям квантовой механики вплоть до публикации результатов ее экспериментальной проверки (см., например, [9]–[15]), инициированной теоремой Белла, привлекала относительно небольшое внимание.. Большинство экспериментальных результатов были консервативными в том смысле, что они строго подтверждали квантовую механику и не согласовывались с требованиями локальных теорий со скрытыми параметрами. Но какие бы результаты ни могли бы быть получены, неожиданно для физического сообщества оказалось, что проблемы, связанные с гипотезами о скрытых параметрах и локальностью, которые в общем случае рассматривались как философские со времен знаменитой дискуссии Эйнштейн - Бор [16, 17], подлежали экспериментальной проверке. “Теорема Белла” стала главой в руководстве для авторов Американского Физического Института, и интерес к этой теореме распространялся среди философов и (к несчастью, часто с преувеличениями и искажениями) широкой публики.

Белл рано получил заслуженное признание, при избрании в члены Королевского общества в 1972 г. его кандидатуру выдвинули Пол Мэттью и Рудольф Пайерлс. В восьмидесятые годы к нему пришла гораздо большая слава: премия Фонда Реальности (the Reality Foundation Prize), разделенная им с Дж. Ф. Клаузером (J.F. Clauser) в 1982 г., звание почетного члена Американской академии искусств и наук (Honorary Fellow of the American Academy of Arts and Sciences) в 1987 г., медаль Дирака Физического института (1988), почетного доктора Королевского университета в Белфасте (1988) и Тринити Колледжа в Дублине (1988), премия Дэнни Хейнеман в области теоретической физики (the Dannie Heineman Prize for Mathematical Physics) (1989) и медаль Ходжеса (the Hughes Medal) Королевского общества (1989). Его вклад в основания квантовой механики регулярно цитировался, постоянно упоминались его открытия на главном направлении физики. Эти почести сочетались со всеобщим признанием того, что человеческие качества Джона Белла соответствовали его интеллекту.

Джон Белл умер от неожиданного инсульта 1 октября 1990 года. Он был еще в расцвете своих способностей вплоть до самого инсульта, и это стало огромной и непоправимой потерей. Мир также потерял человека образцово целеустремленного, целостного, одухотворенного, скромного, творческого и гуманного.

## **2. Основания квантовой механики**

### **2.1. Ранние мысли**

Даже во времена обучения Белл серьезно задумывался над основаниями квантовой механики и не разделял мнения, господствующего в его университете и среди профессиональных физиков вообще. Информация об этом периоде может быть найдена в “Квантовых профилях” (Quantum Profiles) [18] Джереми Бернштейна (Jeremy Bernstein), который интервьюировал Белла, и в биографических статьях Эндрю Уитекера (Andrew Whitaker) [19], черпавшего эту информацию от Лесли Керра (Lesley Kerr), друга Белла, учившегося курсом младше его в Физическом Департаменте Королевского университета. Квантовая механика мыслилась в контексте курса атомных спектров доктора Слоуна (Sloane), развиваемого скорее в части практических приложений, нежели в части концептуальных основ.

Белл расспрашивал Слоуна скептически и даже агрессивно, он не был удовлетворен не только его аргументацией, но и вообще тем, что он изучал на основе Копенгагенского подхода. Аргументация Слоуна

. . . убеждала Белла в приоритетной важности концепции измерения в любой содержательной дискуссии о квантовой теории. Необходимо было выделить это как центральный элемент, чтобы получить возможность критически анализировать факты и осознать незаконность использования идеи измерения как первичного понятия. . . .

В это время больше всего занимал мысли Белла вопрос о том, как отделить классического ‘кота Гейзенберга’ от квантового. Он полностью принял положение Бора о том, что прибор должен трактоваться как классический, но решительно не принимал его доводы о соотношении между квантовой механикой и классической теорией. На самом деле он пытался сказать, что он не понимает, где фактические аргументы Бора выступают в качестве предположения, хотя он знал, что Бор объявил проблему решенной. По возможности Белл стремился полностью устранить различие между квантами и классикой, и наиболее подходящий для этого путь состоял в привлечении скрытых переменных (см. [20], раздел 5).

### **2.2. Идеи относительно измерения и физической реальности: “реальные переменные (beables)”**

Неудовлетворенность Копенгагенской интерпретацией – и квантовой механикой как таковой, если она претендует на то, чтобы быть полной теорией – выражена в этих мыслях Белла, иногда протворечивых ранних идеях, неуклонно пронесенных сквозь всю его карьеру и в дальнейшем отточенных, проясненных и воплощенных в ряде конструктивных программ. Он чувствовал, что Бор и Гейзенберг были глубоко неправы, придавая наблюдению фундаментальную роль в физике, таким образом позволяя сознанию и субъективности проникать или даже заменять физическую сущность, тогда как на самом деле это затемняло исследуемые проблемы. Наблюдение необходимо для

процесса получения знания о физическом мире, однако Белл всегда полагал, что познаваемое имеет объективный статус независимо от факта наблюдения. Ниже приводятся примеры утверждений на эту тему из публикаций, охватывающих период в четверть века:

1967: Легко представить себе вектор состояния для всей вселенной, спокойно эволюционирующей линейным образом во все времена и некоторым образом включающий все возможные миры. Но обычные интерпретационные аксиомы квантовой механики начинают “играть” только тогда, когда система взаимодействует с чем-то еще, является ‘наблюдаемой’. Для вселенной это еще ничего не значит, и квантовая механика в ее традиционной форме еще ничего не может сказать. Она на самом деле не дает способа ухватиться за какую-либо одну нить истории. . . В любом случае кажется, что квантово-механическое описание будет вытеснено, как это уготовано всем теориям, созданным человеком. Но и в текущем состоянии его окончательная судьба видна из его внутренней структуры. Она несет в себе семена собственного разрушения. [21]

1973: Интересно порассуждать о возможности того, что будущая теория не будет носить двойственный и приближенный характер. Такая теория не могла бы быть фундаментальной относительно ‘измерений’, что снова повлекло бы неполноту системы и невозможность контролируемого вмешательства извне. Скорее она должна быть способной сказать о системе не то, что такая-то и такая-то могут наблюдаться как таковые, но то, что они существуют. [22]

1975: Теория локальных “реальных” переменных. Это – претенциозное название для теории, которая является совсем иной, но которая могла бы существовать. . . . Данная терминология – “реальн-ые переменные (be-able)” в противоположность “наблюда-емым (observ-able)” – предназначена не для метафизического запугивания, а для реальной физики. Она выбрана скорее для того, чтобы помочь сделать ясными некоторые обозначения, уже используемые в (и основанные на идеях) обычной квантовой теории. . . . ‘Наблюдаемые’ переменные должны каким-то образом быть выведены из “реальных”. Теория локальных “реальных” переменных должна приводить к (и придавать точный физический смысл) алгебре локальных наблюдаемых. [23]

1981: Где следует искать ‘измерителя’? . . . Если теория применяется к чему-либо, но идеализирует операции наблюдения, мы не обязаны исходить из того, что более или менее подобные измерению процессы все время происходят более или менее повсеместно. [24], разд. 1

1990: Но эксперимент является средством. Целью остается понимание мира. Ограничить квантовую механику так, чтобы свести ее исключительно к мелким лабораторным операциям – значит загубить великую идею. [25]

### **2.3. Логические исследования теорий со скрытыми переменными**

Как отмечено выше в цитате из мемуара Уитекера [20], Белл уже в годы студенчества был привязан к идее теорий со скрытыми переменными, дополняющими описание физической системы, которое дается квантовой механикой. (Позднее он отверг

термин “hidden variables (скрытые переменные)”, который подразумевает недоступность для физического измерения, и предпочитал термин “beables (реальные переменные)”, как это показывает одна из приведенных выше цитат.) Даже не зная в деталях, что собой представляют эти скрытые переменные, можно конструировать их модельные представления, которые смогли бы пролить свет на концептуальные трудности квантовой механики. Например, фиксируя скрытые переменные, можно в принципе определять значения всех наблюдаемых величин, известных в квантовой механике, несмотря на то, что хаотическое поведение физического мира на уровне скрытых переменных – аналогично тепловому хаосу на уровне кинетической теории газов – могло бы помешать экспериментальному контролю, таким образом приводя к соотношению неопределенностей Гейзенберга. Однако, согласно Уитекеру, интерес Белла к скрытым переменным ослаб после чтения книги Макса Борна “Natural Philosophy of Cause and Chance (Натуральная философия причины и случая” [26], которая в общем случае показывала трудность построения теории того типа, который мог бы заново привести к знакомой квантовой статистике, а также утверждала, что фон Нейман [27] дал строгое математическое доказательство невозможности построить такую теорию. Не зная немецкого языка, Белл не мог проверить правильность доказательства фон Неймана, но склонялся к тому, чтобы поверить Борну.

Мы, видимо, не располагаем сведениями о том, как рождались у Белла идеи относительно квантовой механики в период между окончанием Королевского Университета и 1952 г., когда он представил их радикальное развитие. В разделе “Благодарности” пионерской статьи Белла в “Reviews of Modern Physics” под названием “О проблеме скрытых переменных в квантовой механике (On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics)” [7] он пишет: “Первые идеи этой статьи появились в 1952 г. Я горячо благодарю доктора F. Mandl за интенсивное обсуждение в этот период.” Mandl был эмигрантом из Германии и смог рассказать ему о содержании доказательства фон Неймана, еще не переведенного с немецкого. Затем была опубликована работа Дэвида Бома “Возможная интерпретация квантовой теории в терминах ‘скрытых’ переменных (A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of ‘Hidden’ Variables)” [28], допускающая, например, в точности такой тип модели, который теорема фон Неймана якобы делала невозможной. После ее прочтения и своих дискуссий с Mandl Беллу стало ясно, что теорема фон Неймана, будучи математически корректной, несовершенна с физической точки зрения. Одно из допущений фон Неймана касалось ожидаемых значений  $E(A)$ ,  $E(B)$  и т.п. для наблюдаемых  $A$ ,  $B$  и т.п., как это принято в квантовой механике. Он требовал, чтобы в ансамбле систем определенного сорта даже в ансамбле, определенном фиксированными гипотетическими скрытыми переменными – которые могли быть бездисперсными, поскольку каждая наблюдаемая могла быть задана определенным значением, исходя из значения скрытых переменных – ожидаемые величины были аддитивными:

$$E(A + B) = E(A) + E(B) \quad (1)$$

где  $A$  и  $B$  – наблюдаемые системы, с квантово-механической точки зрения представленные самосопряженными операторами, не обязательно коммутирующими. Анализ Белла (опубликованный лишь в 1966 году) был сокрушительным:

Существенное предположение может быть повергнуто следующей критике. На первый взгляд требуемая аддитивность ожидаемых значений кажется весьма оправданной, и скорее неаддитивность доступных значений (собственных значений) нуждается в объяснении. Разумеется, такое объяснение хорошо

известно: измерение суммы некоммутирующих наблюдаемых не может быть обеспечено тривиальным комбинированием результатов отдельных наблюдений двух слагаемых – это требует совершенно различных экспериментов. Например, измерение  $\sigma_x$  для магнитных частиц может быть осуществлено с помощью надежно ориентированного магнита Штерна – Герлаха. Измерение  $\sigma_y$  потребовало бы другой ориентации, а измерение  $(\sigma_x + \sigma_y)$  – третьей (иной) ориентации. Но это объяснение неаддитивности доступных значений одновременно устанавливает нетривиальность аддитивности ожидаемых значений. Последнее является абсолютно специфическим свойством квантово-механических состояний, априорно не очевидным. Нет оснований требовать этого каждый раз в случае гипотетических бездисперсных состояний, функция которых воспроизводит измерительные особенности квантовой механики при усреднении. [7], разд. 3

В дополнение к критике допущений фон Неймана Белл сконструировал семейство моделей со скрытыми переменными для частицы со спином  $\frac{1}{2}$ , в каждой из которых каждой спиновой наблюдаемой последовательно сопоставлены определенные значения, и аддитивность ожиданий для представленных наблюдаемых обеспечивается коммутирующими операторами. Каждая такая модель может быть связана со скрытой переменной  $\lambda$  в пространстве  $\Lambda$  скрытых переменных,  $\lambda(A)$  – значение, сопоставленное этой скрытой переменной с помощью наблюдаемой  $A$ . Далее Белл показал, что каждое квантово-механическое состояние  $\phi$  системы со спином  $\frac{1}{2}$  может быть получено усреднением  $\Lambda$  с соответствующей вероятностной мерой  $\rho$  (независимой от наблюдаемых):

$$\langle \phi | A | \phi \rangle = \int_{\Lambda} A(\lambda) d\rho \quad (2)$$

Конструкция Белла совсем проста, и с первого взгляда можно заметить, что размерность “два” Гильбертова пространства, ассоциированного с системой со спином  $\frac{1}{2}$ , является критической. Белл отмечает, что эти модели со скрытыми переменными концептуально отличаются от соответствующих моделей Боба только алгебраической структурой переменных для систем со спином  $\frac{1}{2}$ , независимо от анализа прибора, используемого для измерения.

Важная часть работы [7] была навеяна теоремой Andrew Gleason [29], не публиковавшейся до 1957 и не известная Беллу до бесед с Josef Jauch после переезда в Женеву. Gleason прямо не ставил вопрос о скрытых переменных, но исследовал вероятностные меры, которые могут быть определены на решетке проекций оператора (изоморфной решетке замкнутых линейных подпространств) в Гильбертовом пространстве. Условия для некоторой вероятностной меры  $m$  таковы:

1.  $m(Q)$  есть неотрицательное действительное число для некоторого проекционного оператора  $Q$  в Гильбертовом пространстве;
2.  $m(I) = 1$ , где  $I$  есть тождественный оператор;
3. Если  $\{Q_i\}$  есть конечное или счетное бесконечное множество взаимно ортогональных проекционных операторов, то  $m(\sum Q_i) = \sum m(Q_i)$ .

Теорема Gleason'a гласит, что если Гильбертово пространство имеет размерность три или более, то вероятностная мера должна определяться либо квантово-механическим чистым состоянием

$$m(Q) = \langle \varphi | Q | \varphi \rangle \quad (3)$$

для некоторого вектора  $\varphi$  в Гильбертовом пространстве с единичной нормой, либо выпуклой комбинацией так определенных мер; эквивалентным образом,  $m$  должно быть определено стандартным квантово-механическим способом

$$m(Q) = \text{Tr}(QW) \quad (4)$$

где  $W$  – статистический оператор, т.е. положительный самосопряженный оператор с единичным следом.

Легко видеть, что  $\text{Tr}(QW)$  не может иметь значения, ограниченные 0 или 1 для всех проекционных операторов  $Q$ , откуда, в свою очередь, следует, что состояние, представленное оператором  $W$  не может быть бездисперсным для каждой наблюдаемой, т.е. для каждого самосопряженного оператора. Следовательно, из теоремы Gleason'a вытекает, что не существует квантово-механических систем в Гильбертовом пространстве размерностью три и более, допускающих бездисперсные состояния; или, на языке фон Неймана, невозможны бездисперсные ансамбли таких систем. Разумеется, поскольку множество бездисперсных состояний пусто, нельзя построить квантово-механическое состояние  $\varphi$  путем соответствующего усреднения по этому множеству. Отметим, что модели со скрытыми переменными, построенные Беллом в более ранней работе [7], не противоречат теореме Gleason'a и ее следствию, поскольку в этом случае размерность Гильбертова пространства равнялась двум.

Доказательство теоремы, которое дал Gleason, является сложным; Белл сообщил (на конференции), что он знал, что ему либо придется изучить доказательство Gleason'a, либо изобрести собственное доказательство интересовавшего его следствия, и последнее оказалось легче. Он сделал это элегантно и просто, в разд. 5 работы [7]. Независимое доказательство следствия опубликовали на следующий год Simon Kochen и Ernest Specker [30].

После того, как это было выполнено, конец статьи Белла [7] содержит замечательный сюрприз. Показав, что программа использования скрытых переменных, сконструированная так, как он описал перед тем, математически неосуществима за исключением тривиального случая размерности два, Белл воскресил эту программу с помощью хорошо аргументированного ослабления условий. Он остроумно заметил: "То, что так убедительно следует из столь несомненно невинных допущений, приводит нас к вопросу о невинности самих этих допущений." Он указывает: вовсе не невинно подразумеваемое допущение, согласно которому если определена скрытая переменная  $\lambda$ , то "измерение наблюдаемой должно давать то же самое значение независимо от того, что может быть одновременно выполнено другое измерение." Если наблюдаемые  $A$  и  $B$  коммутируют, то квантовая механика требует, чтобы обе величины в принципе могли быть измерены одновременно, поскольку существует наблюдаемая  $C$  такая, что  $A$  может быть выражена в виде функции  $A(C)$  и  $B$  – в виде функции  $B(C)$ . Но  $A$  может коммутировать с двумя некоммутирующими наблюдаемыми  $B$  и  $B'$ , и тогда  $C$ , от которой  $A$  и  $B$  являются функциями, с необходимостью отличаются от  $C$ , от которой функциями являются  $A$  и  $B'$ . Таким образом, требуются различные процедуры для измерения  $A$  и  $B$  с одной стороны, и измерения  $A$  и  $B'$  с другой. Это наблюдение открывает новое семейство теорий со



скрытыми переменными, которые можно назвать “контекстными” и в которых значение наблюдаемой  $A$  является функцией не только скрытой переменной  $\lambda$ , но также и контекста измерения. Модель Боба [28] была примером этой идеи, но он не представил данную идею ясно и полно. С помощью ловкого маневра Белл оказывает непреднамеренное содействие в воскрешении программы скрытых переменных Нильса Бора, убежденного оппонента этого, цитируя тезис Бора о “невозможности четкого различия между поведением атомных объектов и их взаимодействием и взаимодействием с измерительными приборами, которые используются для определения условий, при которых данные явления проявляются” [31].

## 2.4. Теорема Белла

Наиболее значительная из статей Белла по основаниям квантовой механики – его работа “О парадоксе Эйнштейна-подольского-Розена (On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox)” [6]. Опубликованная в 1964, она ссылается на работу [7], которая появилась двумя годами позже. Объяснение этого хронологического недоразумения заключается в том, что работа [7] затерялась в офисе Reviews of Modern Physics. Статья [6] является первым изложением того, что стали называть “теоремой Белла”, которая строго запрещает существование теорий со скрытыми переменными, удовлетворяющих некоторому условию локальности и – одновременно – всем предсказаниям квантовой механики. Наименование “теорема Белла” в настоящее время применяется к семейству теорем общего характера подобного типа, но мы будем рассматривать только три варианта, которые доказал сам Белл. Во всех этих вариантах Белла рассматривается пространство системы, полностью определенной скрытыми переменными (в отличие от иных вариантов, а именно дискуссионных вариантов Генри Стаппа (Henry Stapp) [32, 33] и других подобных), и результаты не зависят от конкретного вида скрытых переменных. Здесь важно (i) способ, которым квантово-механическая наблюдаемая определяется скрытыми переменными, и (ii) тот факт, что пространство скрытых переменных допускает вероятностные распределения. В работе [6] скрытая переменная предполагается единственным непрерывным параметром, а исследуемая система – с целью доказательства теоремы – состоит из двух надежно разделенных частиц 1 и 2. Семейство величин, параметризуемых с помощью “ $a$ ”, измеряется для частицы 1, причем для простоты предполагается, что результаты измерения могут иметь только два возможных значения:  $+1$  and  $-1$ . Точно так же семейство величин, параметризуемых с помощью “ $b$ ”, измеряется для частицы 2, причем результаты измерения также могут иметь только два возможных значения:  $+1$  and  $-1$ . Результат измерения для частицы 1 есть функция

$$A(a, \lambda) = \pm 1 \quad (5a)$$

не зависящая от результата измерения для частицы 2; подобным же образом результат измерения для частицы 2 есть функция

$$B(b, \lambda) = \pm 1 \quad (5b)$$

не зависящая от результата измерения для частицы 1. Поскольку результаты являются вполне определенными когда величины заданы параметром  $a$  (соответственно,  $b$ ) при данном  $\lambda$ , теория скрытых переменных является детерминистической. Может показаться, что Белл пренебрег возможностью контекстного подхода, который он ввел в работе [7] для воскрешения программы скрытых переменных, но это впечатление связано с выбором

обозначений. Суть дела состоит в том, что два различных параметра  $a$  и  $a'$  для частицы 1 могут указывать на одну и ту же измеримую величину, измеряемую в разных контекстах для частицы 1, хотя при этом не описывают измерение для частицы 2; аналогично для  $b$  и  $b'$ .

Контекстность ясно выступает в этой версии теоремы Белла, но она ограничена требованием локальности, которое является жизненно важным: результат  $A$  не зависит от того, что дает измерение для частицы 2, а результат  $B$  не зависит от того, что дает измерение для частицы 1. Белл подкрепляет это требование цитатой из Эйнштейна.

Но одно предположение, по моему мнению, мы должны сделать сразу: реальная фактическая ситуация для системы  $S_2$  не зависит от того, что происходит с системой  $S_1$ , которая пространственно удалена от первой. [6], *сноска 2*

В работе [6] надежно разделенные частицы 1 и 2 полагаются обладающими спин  $\frac{1}{2}$  и образующими квантово-механическое синглетное состояние. Если  $a$  и  $b$  суть векторы обычного трехмерного пространства, то  $\sigma_1 \cdot a$  будет величиной, параметризованной с помощью  $a$ , и  $\sigma_2 \cdot b$  – величиной, параметризованной с помощью  $b$ .

Антикорреляция спинов частиц в синглетном состоянии гарантирует, что если  $a$  и  $b$  равны, то результаты измерений соответствующих величин для 1 и 2 противоположны, или, что то же самое, произведение результатов измерений для них даст  $-1$ . Чтобы теория со скрытыми переменными давала такое же предсказание, что и квантовая механика, должно существовать распределение  $\rho$  вероятности в пространстве скрытых переменных (нормированное на единицу) такое, что

$$\int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(a, \lambda) = -1. \quad (6)$$

Но это возможно только если

$$A(a, \lambda) = -B(a, \lambda) \quad (7)$$

для всех (за исключением множества меры нуль) в пространстве скрытых переменных.

Мы уже воспроизвели все представления и допущения теоремы из работы [6], остальная часть является чисто математической, и мы изложим ее в сжатом виде. Используя уравнения (5), (6) и (7), мы легко докажем неравенство

$$1 + P(b, c) \geq |P(a, b) - P(a, c)| \quad (8)$$

где

$$P(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda) \quad (9)$$

(это величина представляет собой математическое ожидание произведения вероятности  $\rho$  на результаты измерения компонент спинов, параметризованные с помощью  $a$  и  $b$ ). Неравенство (8) служит прототипом семейства неравенств, которые теперь получили коллективное название “неравенства Белла”.

Хорошо известным следствием квантово-механического синглетного состояния является тот факт, что математическое ожидание произведения произвольной спиновой компоненты частицы 1 на произвольную спиновую компоненту частицы 2 удовлетворяет условию

$$\langle \sigma_1 \cdot a \sigma_2 \cdot b \rangle = -a \cdot b \quad (10)$$

Различие между неравенством (8) для скрытых переменных и квантово-механическим математическим ожиданием (10) видно непосредственно, что и доказывает теорему статьи [6].

Статья содержит важные дополнительные моменты. Заголовок (“On the Einstein-Podolsky-Rosen [EPR] Paradox”) свидетельствует о важном влиянии ЭПР-статьи [16] на выбор пары надежно разделенных частиц, специально приготовленной для обеспечения жестких корреляций между некоторыми их наблюдаемыми величинами. Белл указывает в разделе 2, что детерминистический характер теории со скрытыми переменными, к которой апеллирует ЭПР, является не дополнительным допущением, а следствием ЭПР-предположений о локальности, на точное согласие с квантово-механическими предсказаниями о жесткой корреляции, и на их хорошо известное достаточное условие существования элемента физической реальности (но его упоминание о третьем допущении скорее воспроизводит его, чем признает в качестве окончательного). Далее, при обсуждении погрешностей конкретного измерения, Белл спрашивает в разделе 4 статьи [6], может ли детерминистическая локальная теория со скрытыми переменными быть приближенно согласована с предсказаниями квантовой механики, и дает отрицательный ответ, выводя обобщение неравенств (8). Он также кратко упоминает обобщения своей теоремы о парах систем, каждая из которых ассоциируется с Гильбертовым пространством размерности большей 2 и обладает наблюдаемыми с более чем двумя возможными значениями. Наконец, и это наиболее примечательно, в разделе 6 он упоминает возможность ограниченной справедливости квантовой механики, применимой лишь тогда, когда “настройки приборов позволяют им обнаружить некоторые взаимные связи путем обмена световыми или досветовыми сигналами”. Если бы это было так, то заложенное в теорему требование локальности не имело бы физического обоснования и не являлось бы следствием локальности специальной теории относительности. Для проверки такой возможности “решающими были бы эксперименты типа предложенного Бомом и Аароновым . . . в которых настройки изменяются уже во время разлета частиц” [34]. Таким образом, в этой пионерской работе 1964 Белл уже говорил о желательности эксперимента, который впоследствии осуществили Aspect, Dalibard и Roger в 1982 году [15].

В 1971 году Белл [35] опубликовал новую версию своей теоремы, усовершенствованную в двух отношениях. (a) Она заметно переориентирована на квантовую механику и основана на вышеприведенном уравнении (2), имея в виду вывод решающего неравенства. В этом он следует статье Клаузера и др. [36] 1969 года. Если результирующее неравенство конфликтует с экспериментом, то можно сделать вывод не только о несовместимости квантовой механики с допущениями теории со скрытыми переменными, но и о ложности этих допущений самих по себе независимо от совместимости с квантовой механикой. (b) Ослабляется допущение (5), что скрытые параметры детерминистически задают результат измерения каждой наблюдаемой величины для частиц 1 и 2, утверждая взамен, что  $\lambda$  фиксирует лишь математическое ожидание результата измерения указанных величин для частицы 1, параметризованного с помощью  $a$  (или, аналогично, вероятность каждого возможного измеренного результата), и точно так же обстоит дело для величин, относящихся к частице 2, где параметризация осуществляется с помощью  $b$ . Требование локальности состоит в том, что математическое ожидание для первой частицы не зависит от  $b$ , и наоборот. В разделе 4 Белл говорит, что погрешность детерминистических уравнений типа вышеприведенных уравнений (5) может

быть связана со скрытыми переменными приборов, но в сноске 10 он добавляет, что эта погрешность может быть связана и с более фундаментальным индетерминизмом, даже в том случае, когда имеются скрытые переменные как для частиц, так и для приборов. Характер индетерминизма не влияет на математику, которая приводит к неравенству

$$|P(a, b) - P(a, b')| + |P(a', b') + P(a', b)| \leq 2 \quad (11)$$

Легко показать несовместимость неравенства (11) как с идеальным предсказанием квантовой механики, даваемым уравнением (10), так и с заведомо выполняющимися в экспериментах хотя бы приближенными к идеальному предсказанию. С точки зрения тех предположений, на которых неравенство (11) основано, его несоответствие эксперименту бросает тень на целое семейство детерминистических и индетерминистических теорий с локальными скрытыми переменными.

Третий вариант теоремы Белла появился в несколько неровной форме в работе “Теория локальных реальных переменных (The theory of local beables)” [23], но его более удачное изложение, встреченное с определенной долей критики, появилось в “Новой Кухне (La Nouvelle Cuisine)” [37], написанной слишком поздно, чтобы быть включенной в сборник “Произносимое и умалчиваемое в квантовой механике (Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics)”. В этом варианте по сравнению с предшествующими привлекает внимание большая ясность понятия требования локальности. Он предполагает, что измерения величин, параметризованных, соответственно, с помощью  $a$  и  $b$ , выполнены в двух областях 1 и 2, разделенных пространственно-подобным интервалом. (С точки зрения специальной теории относительности такое определение идеального эксперимента, очевидно, более корректно, чем выражение “надежно разделенные частицы – well-separated particles”.) Область 3 ограничена двумя непересекающимися пространственно-подобными поверхностями, но оба проходят через световые конусы прошлого обеих областей 1 и 2 таким образом, что сечения более поздней поверхности с двумя световыми конусами прошлого являются неперекрывающимися, если сечения более ранней поверхности с двумя световыми конусами прошлого перекрываются (Region 3 is bounded by two nonintersecting space-like surfaces, both cutting through the backward lightcones of both 1 and 2 in such a way that the intersections of the later surface with the two backward lightcones are nonoverlapping, while the intersections of the earlier surface with the two backward lightcones overlap). В области 3 обозначим через  $c$  некоторое множество физических величин, описывающих экспериментальные установки и обуславливающие, согласно квантовой механике, в этой части области 3 невозможность для двух световых конусов прошлого и  $\lambda$  быть другими переменными (дополнительно к  $c$ ), необходимыми для полного описания этой части области 3.

Вероятность совместных результатов  $A$  и  $B$  двух измерений, очевидно, зависит только от  $a, b, c$  и  $\lambda$  и, следовательно, может быть записана как  $\{A, B | a, b, c, \lambda\}$ , что с помощью стандартной теории вероятности может быть разложено в виде:

$$\{A, B | a, b, c, \lambda\} = \{A | B, a, b, c, \lambda\} \{B | a, b, c, \lambda\} \quad (12)$$

Тогда, заключает Белл, требуя локальной причинности и предполагая достаточность  $c$  и  $\lambda$  в соответствующих частях области 3, мы объявляем избыточными некоторые из условных переменных в последнем выражении, поскольку они разделены пространственно-подобным интервалом, как было принято. Теперь мы имеем

$$\{A, B | a, b, c, \lambda\} = \{A | B, a, c, \lambda\} \{B | b, c, \lambda\} \quad (13)$$

Белл замечает, что уравнение (13) “представляет A и B не зависящими ни друг от друга, ни от настройки удаленных поляризаторов (b и a соответственно), а зависящих только от своих локальных поляризаторов (a и b соответственно) и от причин в прошлом, c и  $\lambda$ .” Уравнение (13) в явной форме выражает требование локальности, используемое в статье [35], но здесь оно выступает не как отправная точка его анализа, а скорее как следствие двух совершенно различных допущений о локальности, использованных в процессе перехода от (12) к (13). (Похожее обоснование имеется в разделах 2 и 4 работы [23] и в статье J. Jarrett [38].) После вывода уравнения (13) и обоснования того, что вероятностное распределение для скрытой переменной  $\lambda$  не зависит от произвольно выбранных переменных a и b и, следовательно, зависят лишь от c, можно получить условие разложимости для математических ожиданий:

$$E(a, b, c) = \sum_{\lambda} \sum_{A, B} AB \{A | a, c, \lambda\} \{B | b, c, \lambda\} \{\lambda | c\} \quad (14)$$

Неравенство (11) может теперь быть действительно выведено так, как это сделано [35] и [36], детали Белл опускает.

## Библиография

- [1] J.S. Bell, "Time Reversal in Field Theory", *Proc. Roy. Sci. A* **231**, 479–95 (1955).

Note: In all of the following references, the author or co-author is John Bell, unless another author is explicitly listed.

- [2] (With T.H.R. Skyrme) "The Nuclear Spin-Orbit Coupling", *Phil. Mag.* **1**, 1055–68 (1956); (with R.J. Eden and T.H.R. Skyrme) "Magnetic Moments of Nuclei and the Nuclear Many-Body Problem", *Nucl. Phys.* **2**, 586–92 (1956/7); (with T.H.R. Skyrme) "The Anomalous Moments of Nucleons", *Proc. Roy. Sci. A* **242**, 129–42 (1957); "Nuclear Magnetic Moments and the Many-Body Problem", *Nucl. Phys.* **4**, 295–312 (1957); (with J.M. Soper) "Hard Core Correlations and Nuclear Moments", *Nucl. Phys.* **13**, 167–76 (1959).
- [3] "Many Body Effects in Beta-Decay", *Nucl. Phys.* **5**, 167–72 (1957); "Many Body Problem with One-Body Forces", *Proc. Phys. Soc.* **73**, 118–9 (1959); (with R.J. Elin-Stoyle) "Mesonic Effects in Beta Decay", *Nucl. Phys.* **6**, 87–99 (1958); "Particle-Hole Conjugation in the Shell Model", *Nucl. Phys.* **12**, 117–24 (1959); "The Many-Body Problem", *Proc. Rutherford Jubilee Int. Conf. Manchester 1961*, J.B. Birks, ed. (Heywood, London 1961); "Superfluidity in Nuclear Matter" and "Elimination of the Hard Core", *Lecture Notes on the Many-Body Problem, First Bergen Int. School of Phys. 1961*, C. Fronsdal, ed. (Benjamin, New York 1962); (with E.J. Squires) "The Theory of Nuclear Matter", *Adv. Phys.* **10**, 211–312. (1961).
- [4] (With E.J. Squires) "A Formal Optical Model", *Phys. Rev. Lett.* **3**, 96–7 (1959); "Formal Theory of the Optical Model", *Lectures on the Many Body Problem, 1959*, E.R. Caianello, ed. (Academic Press, New York 1962).
- [5] *Speakable and Unsayable in Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, Cambridge, UK 1987).
- [6] "On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox", *Physics* **1**, 195–200 (1964); reprinted in Ref. [1].
- [7] "On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447–52 (1966); reprinted in Ref. [1].
- [8] (With R. Jackiw) "A PCAC Puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$ -Model", *Nuovo Cim.* **69**, 47–61 (1969).

- [9] S.J. Freedman and J.F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories", *Phys. Rev. Lett.* **28**, 938–41 (1972).
- [10] G. Faraci, D. Gutkowski, S. Nottarigo, and A.R. Pennisi, "An Experimental Test of the EPR Paradox", *Lett. Nuovo Cim.* **9**, 607–11 (1974).
- [11] L.R. Kasday, J.D. Ullman, and C.S. Wu, "Angular Correlation of Compton Scattered Annihilation Photons and Hidden Variables", *Nuovo Cim.* **25B**, 633–61 (1975).
- [12] J.F. Clauser, "Experimental Investigation of a Polarization Correlation Anomaly", *Phys. Rev. Lett.* **6**, 1223–6 (1976).
- [13] E.S. Fry and R.C. Thompson, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories", *Phys. Rev. Lett.* **37**, 465–8 (1976).
- [14] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91–4 (1982).
- [15] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, "Experimental Tests of Bell's Inequalities Using Time-varying Analyzers", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804–7 (1982).
- [16] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **47**, 777–80 (1935).
- [17] N. Bohr, "Can Quantum-mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?", *Phys. Rev.* **48**, 696–702 (1935).
- [18] J. Bernstein, *Quantum Profiles* (Princeton University Press, Princeton, NJ 1991).
- [19] A. Whitaker, "John Bell and the Most Profound Discovery of Science", *Phys. World* **12**, 29–34 (1998).
- [20] A. Whitaker, "John Bell in Belfast: Education and Early Years", in *Quantum (Un)speakables*, eds. R.A. Bertlmann and A. Zeilinger (Springer Verlag, Heidelberg 2001).
- [21] (With M. Nauenberg) "The Moral Aspect of Quantum Mechanics", in *Preludes in Theoretical Physics*, eds. A. de Shalit, H. Feshbach, and L. van Hove (North Holland, Amsterdam 1966) ; reprinted in Ref [8].

- [22] "Subject and Object", in *The Physicist's Concept of Nature*, ed. J. Mehra, (D. Reidel, Dordrecht 1973); reprinted in Ref. [9].
- [23] "The Theory of Local Beables", *Epistem. Lett.* 9, 11 et seq. (1976); reprinted in *Dialectica* 39, 86–96 (1985) and in Ref. [9]. [Note that some readers, among them one of us (A.S.), have objected that "observable" means "able to be observed", and by analogy "beable" should mean "able to be," and hence for Bell's purposes should be replaced by some term like "existent" or "being".]
- [24] "Quantum Mechanics for Cosmologists", in *Quantum Gravity 2*, ed. C. Isham, R. Penrose, and D. Sciama (Clarendon Press, Oxford 1981); reprinted in Ref. [9].
- [25] "Against 'Measurement'", *Phys. World* 3, 33–40 (1990).
- [26] M. Born, *The Natural Philosophy of Cause and Chance* (Clarendon Press, Oxford 1949).
- [27] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin 1932); English translation: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton 1955). [In the English translation the proof of the impossibility of a hidden variables interpretation is given on pp. 305–24.]
- [28] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of Quantum Theory in Terms of 'Hidden' Variables" I and II, *Phys. Rev.* 85 166–79 and 180–93 (1952).
- [29] A. Gleason, "Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space", *J. Math. and Mech.* 6, 885–93 (1957).
- [30] S. Kochen and E. Specker, "The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics", *J. Math. and Mech.* 17, 59–88 (1967).
- [31] N. Bohr, in *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, ed. P.A. Schilpp (Library of Living Philosophers, Evanston, IL 1949).
- [32] H.P. Stapp, "Bell's Theorem and World Process", *Nuovo Cim.* 29, 270–6 (1975).
- [33] H.P. Stapp, "Nonlocal Character of Quantum Theory", *Am. J. Phys.* 65, 300–4 (1997); critically evaluated by A. Shimony and H. Stein, "On Stapp's 'Nonlocal Character of Quantum Theory'", *Am. J. Phys.* 69, (2001).
- [34] D. Bohm and Y. Aharonov, "Discussion of the Experimental Proof of the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky" *Phys. Rev.* 108 1070–7 (1957).



- [35] "Introduction to the Hidden-Variable Question", in *Foundations of Quantum Mechanics: Proc. of Int. School of Physics 'Enrico Fermi', Course 49*, ed. B. d'Espagnat (Academic Press, New York 1971); reprinted in Ref. [8].
- [36] J.F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony, and R.A. Holt, "Proposed Experiment to Test Local Hidden Variable Theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880–4 (1969).
- [37] "La nouvelle cuisine", in *Between Science and Technology*, ed. A.Sarlemijn and P.Kroes (Elsevier, Amsterdam 1990).
- [38] J. Jarrett, "On the Physical Significance of the Locality Conditions in the Bell Arguments", *Nous* **18**, 569–89 (1984).
- [39] "How to Teach Special Relativity", in *Progress in Scientific Culture 1* (summer 1976); reprinted in Ref. [8].
- [40] "Beables for quantum field theory", Ref. [8].
- [41] "Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics", Ref. [8].
- [42] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* 3rd ed. (Pergamon, Oxford 1977).
- [43] K. Gottfried, *Quantum Mechanics* (Benjamin, Reading, MA 1966).
- [44] N.G. van Kampen, "Ten Theorems about Quantum Mechanical Measurements", *Physica* **A153**, 97–113 (1988).
- [45] "The Measurement Theory of Everett and de Broglie's Pilot Wave", *Quantum Mechanics, Determinism, Causality, and Particles*, ed. M. Flato et al. (Reidel, Dordrecht 1976); reprinted in Ref. [8].
- [46] L. de Broglie, "Nouvelle Dynamique des Quanta", *Electrons et Photons, Rapports et Discussions du Cinquième Conseil de Physique* (Gauthier-Villars, Paris 1928).
- [47] "de Broglie-Bohm, Delayed Choice Double-slit Experiment, and Density Matrix", *Int. J. of Quant. Chem.* **14**, 155–9 (1980); reprinted in Ref. [8].
- [48] G.C. Ghirardi, A. Rimini, and T. Weber, "Unified Dynamics of Microscopic and Macroscopic Systems", *Phys. Rev. D* **34**, 470–91 (1986).