

НИТЬ, ВЕДУЩАЯ К РАЗМЫШЛЕНИЯМ  
О РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА  
(научно-популярное введение в шестимерную физику  
с использованием только школьной математики)

И. А. Урусовский

Возьмите две нити одинаковой длины и намотайте их на круглую палку, одну нить – в каком-либо одном месте палки, а вторую – распределяя её витки по длине палки, можно туда и обратно. Синус угла наклона к поперечному сечению палки для второй нити при её намотке пусть будет равен отношению скорости космического путешественника к скорости света в момент времени, пропорциональный длине намотанной части нити, в системе отсчёта неподвижного наблюдателя. Тогда отношение числа витков второй нити к числу витков первой будет равно отношению времени, прошедшего по часам путешественника, ко времени, прошедшему по часам неподвижного наблюдателя, в полном согласии с теорией относительности.

Очевидно, что число витков второй нити будет меньше числа витков первой, так что время путешествия, отсчитанное по движущимся часам, окажется меньше отсчитанного по неподвижным. Поэтому если путешественник и домосед – близнецы, то биологический возраст близнеца, совершившего космическое путешествие, будет меньше, чем у близнеца – домоседа.

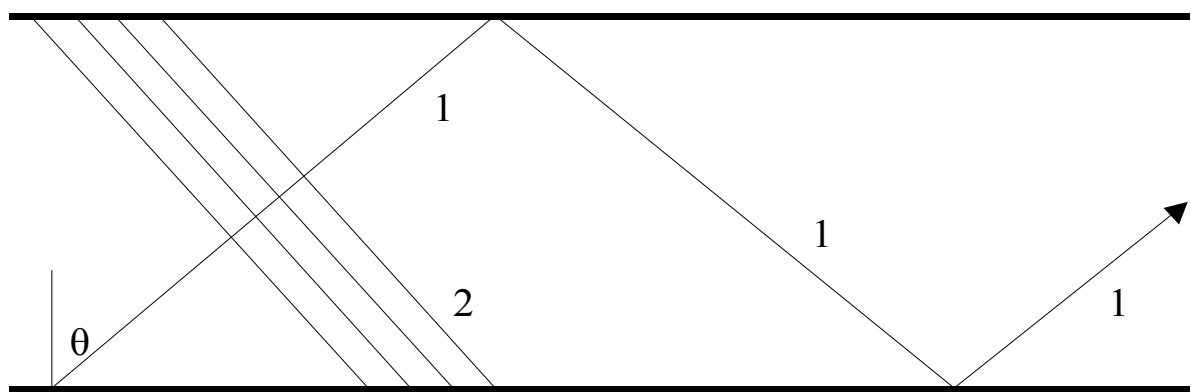
Можно подходить к этому факту просто как к удобной геометрической интерпретации результата теории относительности, интерпретации, позволяющей легко и без расчётов получить отношение указанных времён, не задаваясь вопросом: не стоит ли за такой интерпретацией содержательная физика? С такими читателями на этом и простимся. Но для любознательных читателей полезно сообщить следующее.

Уравнение дисперсии для акустического волновода, для электромагнитного волновода и для волн де Бройля одно и то же:  $v_{\phi} v_g = c^2$ , где  $v_{\phi}$  – фазовая скорость волн,  $v_g$  – групповая скорость (для волн де Бройля равная скорости соответствующей частицы),  $c$  – скорость волн в свободной среде (скорость звука в первом случае и света в двух других). Основной характеристикой любого волновода является то, что он имеет конечные поперечные размеры. Они и обуславливают дисперсию волн. Это

указывает на то, что та часть пространства, с которой мы имеем дело в экспериментах и наблюдениях, является трёхмерной лишь приближенно и имеет малые (комптоновские) размеры в дополнительном подпространстве, которому перпендикулярны все направления в привычном всем трёхмерном пространстве.

Вдоль световых лучей энергия всегда распространяется со скоростью  $C$ , в том числе и в волноводе. Однако в волноводе лучи испытывают последовательные отражения от его границ (рис. 1). Поэтому вдоль волновода фотоны (частицы света) распространяются с меньшей скоростью, равной  $v = c \sin \theta$ , где  $\theta$  – угол между лучом и поперечным сечением волновода. С другой стороны, фазовые фронты нормальных волн в волноводе (волн, удовлетворяющих условиям на границах волновода) перпендикулярны лучам (фазовые фронты соответствуют возмущениям в один и тот же момент времени). Хотя фронты движутся вдоль лучей со скоростью  $C$ , точки пересечения фронта с границей или осью волновода движутся с фазовой скоростью  $v_\phi = c / \sin \theta = c^2 / v$ , превышающей скорость  $C$ , откуда и следует закон дисперсии  $v_\phi v_g = c^2$ .

Рис.1.



1 – лучи в волноводе. 2 – фронты волн, перпендикулярные лучам.

Волноводы могут быть и поверхностными. Так, для цилиндрического поверхностного волновода лучи имеют вид винтовых линий на цилиндре. Фазовые фронты для них – это другие винтовые линии, перпендикулярные первым. Скорости распространения энергии и фазовых фронтов вдоль такого волновода описываются

теми же формулами, где  $v_\phi$  — скорость перемещения точки пересечения фазового фронта с образующей цилиндра. Читатели, не знакомые с теорией волн, могут получить представление о фронтах поверхностных волн, наблюдая за волнами, накатывающимися на берег моря, или даже распространяющимися по поверхности пруда, следуя наставлению Козьмы Пруtkова: «Бросая в воду камень, гляди на круги, от него расходящиеся, иначе сие твое занятие будет пустою забавою». Объёмные волны отличаются от поверхностных в основном лишь тем, что распространяются в объёме, а не по поверхности.

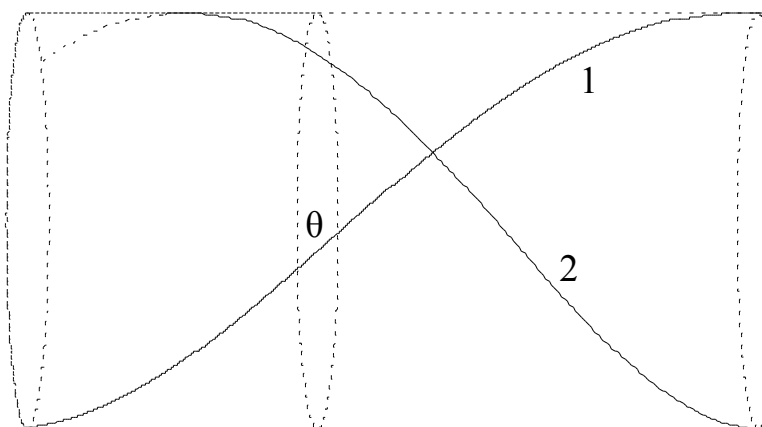


Рис. 2

Поверхностный волновод. 1 — лучи в виде винтовых линий.

2 — винтовые фронты волн, перпендикулярные лучам.

Предлагаемая трактовка основана на принципе простоты [1], отдающем предпочтение той из конкурирующих гипотез, которая основана на меньшем числе постулатов, т.е. более проста. Она восходит к утверждению Эйнштейна, что "природа экономит на принципах", и к идее Ф. Клейна [2 – 4] о движении частиц со скоростью света в многомерном пространстве, также вписывающихся в принцип простоты и его конкретизирующих. Здесь уместно вспомнить славословие украинского философа семнадцатого века Григория Сковороды: «Слава Создателю, сотворившему всё нужное простым, а сложное — ненужным». Если это не наставление теоретикам, то что же?

Как известно, свет и частицы вещества обладают как корпускулярными, так и волновыми свойствами, примерами чего являются дифракция электронов в кристалле, когда электрон ведёт себя как волна, и фотоэффект, когда свет проявляет себя как частица. Поэтому, следуя принципу простоты, естественно предположить, что некоторые основные свойства света и частиц вещества одинаковы. Основным свойством света является то, что он распространяется с одинаковой скоростью в любой системе отсчёта. Тогда и элементарные частицы вещества должны двигаться с той же скоростью. Это невозможно в трёхмерном пространстве, но возможно в многомерном пространстве, если положение частиц регистрируется наблюдателем в проекции на однородное и изотропное пространство  $x_1, x_2, x_3 (X)$  (изотропность пространства – это отсутствие в нём выделенных направлений). При этом ньютоновские представления, распространённые на шестимерное евклидово пространство  $(R_6)$ , при проецировании событий на трёхмерное подпространство  $X$  дают общепринятые представления и результаты (пространство евклидово, если для него справедлива теорема Пифагора: квадрат длины вектора равен сумме квадратов всех его составляющих по осям координат).

Полное пространство предполагается шестимерным, поскольку лишь для него возможна простая интерпретация спина и изоспина электрона и других частиц. Спин – это собственный момент количества движения частицы, который в квантовой механике трактуется как результат воображаемого вращения частицы (spin по-английски означает вращение). Изоспин – это момент количества движения частицы в воображаемом изотопическом пространстве. Несмотря на отсутствие трактовки спина и изоспина в рамках классической физики, они проявляются во взаимодействиях частиц и могут быть измерены.

Первое обоснование шестимерности пространства было дано в [5], где получены теоретические значения фундаментальных физических постоянных, для семи наиболее употребительных из которых, явно не являющихся комбинацией друг друга, суммарно первые 36 значащих цифр подтверждаются экспериментом, так что вероятность случайного совпадения с экспериментальными данными не превышает  $10^{-36}$  (!)

Предположим, что для движущихся в шестимерном пространстве  $R_6$  элементарных частиц, рассматриваемых как материальные точки, применимы формулы механики Ньютона при подходящем выборе времени (указанном ниже). На эти частицы должны действовать силы, перпендикулярные к подпространству  $X$  и удерживающие их в его малой окрестности. В противном случае в этом трехмерном подпространстве образование макроскопических тел было бы невозможным. Положение частиц в  $R_6$  описывается шестью координатами. Наблюдателем же оно фиксируется в проекции на подпространство  $X$ . Неподвижная в проекции на  $X$  частица в инерциальной системе трёхмерного наблюдателя (эту систему можно принять за неподвижную) движется со скоростью света в простейшем случае по окружности, расположенной в одной из плоскостей дополнительного трёхмерного подпространства  $y_1, y_2, y_3$  ( $Y$ ) с центром, расположенным в  $X$  (при  $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ ). В любой другой инерциальной системе отсчёта рассматриваемая частица движется в  $R_6$  по винтовой линии, расположенной на цилиндрической поверхности, которую для краткости будем называть трубкой движения, с осью, принадлежащей подпространству  $X$ .

Единственной и естественной мерой собственного времени частицы (времени по часам, относительно которых движение частицы отсутствует) является число оборотов частицы в дополнительном подпространстве  $Y$  вокруг оси трубки. Поэтому будем считать собственное время частицы пропорциональным числу оборотов. Вообще, число оборотов частицы пропорционально  $|\cos\theta|$ , где  $\theta$  – угол наклона винтовой линии к направляющей трубки движения (рис. 3). Поэтому, если частица совершает один оборот за собственное время  $\tau$ , то по часам неподвижного наблюдателя, относительно которого частица движется вдоль трубки со скоростью  $v = c \sin\theta$ , где  $c$  – скорость света, это произойдёт за время  $t = \tau / |\cos\theta|$ . Учитывая,

что  $\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}$ , найдем

$$\sin\theta = v/c, \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (1)$$

где верхний знак перед квадратным корнем относится к частице, вращающейся вокруг оси трубки в положительном направлении, нижний – к её античастице, вращающейся в противоположном направлении. Такой выбор знака соответствует следующему соотношению между промежутками собственного времени частицы (или античастицы)  $d\tau$  и времени неподвижного наблюдателя  $dt$  :

$$dt = \pm d\tau / \cos\theta = d\tau / \sqrt{1 - (v/c)^2} . \quad (2)$$

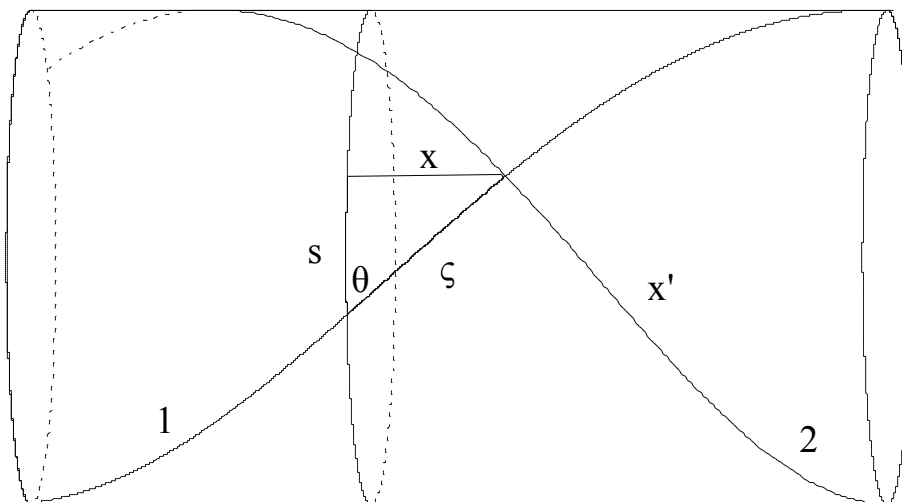


Рис. 3

1 – винтовая траектория частицы, движущейся со скоростью света  $c$  в шестимерном пространстве по поверхности цилиндра комптоновского радиуса  $a = \hbar/(mc)$  с осью в подпространстве  $X$  и направляющей в подпространстве  $Y$ . 2 – проходящая через частицу под прямым углом к её траектории винтовая линия одинакового собственного времени частицы, движущаяся вдоль цилиндра со скоростью волн де Бройля; её шаг равен длине волны де Бройля.

Отсюда и из того, что поперечная проекция длины малого участка нити, намотанного на круглую палку под углом  $\theta$  к поперечному сечению палки, пропорциональна  $\cos\theta$ , видно, что отношение числа витков второй нити к числу витков первой будет равно отношению времён  $\tau/t$  путешествия соответственно по собственному времени и по часам неподвижного наблюдателя.

Частица, движущаяся со скоростью света  $c$  в неподвижной системе отсчёта ( $K$ ) под углом  $\theta$  к направляющей трубки, имеет составляющую скорости по направляющей, равную  $v \cos\theta$ . Ход собственного времени частицы с точки зрения неподвижного наблюдателя замедляется согласно (2) также пропорционально  $\cos\theta$ . Поэтому рассматриваемая частица и в собственной системе отсчёта ( $K'$ ) движется по направляющей со скоростью света  $c$ .

Неподвижная в системе  $K$  частица также движется по направляющей со скоростью света  $c$ . При этом она перемещается по направляющей за собственное время  $d\tau$  на интервал  $ds$ , равный

$$ds = \pm c d\tau . \quad (3)$$

Импульс (количество движения) этой частицы есть вектор, направленный по касательной к направляющей в точке, в которой частица в данный момент находится, и по величине равный  $mc$  – произведению массы частицы  $m$  на её скорость. Эта величина равна импульсу покоя релятивистской механики. Здесь уместно вспомнить, что покой нам только снится – движение-то в подпространстве  $Y$  всё равно происходит, да ещё со скоростью света! Энергия покоя  $E_0$  по определению равна произведению импульса покоя на скорость частицы по направляющей, так что  $E_0 = mc^2$  (это знаменитая формула Эйнштейна, связывающая массу и скрытую энергию частицы).

В общем случае полный импульс частицы есть вектор, направленный по касательной к её винтовой траектории на трубке движения и по величине  $P$  равный произведению массы частицы  $m$  на отношение пройденного ею пути

$$d\zeta = c dt \quad (4)$$

в полном пространстве к затраченному на этот путь собственному времени  $d\tau$  :

$$p = m \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{mc}{|\cos\theta|} = \frac{mc}{\sqrt{1-(v/c)^2}} . \quad (5)$$

Это известная релятивистская формула для полного импульса частицы [6]. Проекции  $p_x$  и  $p_y$  полного импульса на образующую и направляющую трубки равны соответственно

$$p_x = \pm mc \operatorname{tg} \Theta = mv / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad p_y = \pm mc. \quad (6)$$

Эти проекции именуется в релятивистской механике соответственно координатной и временной компонентами 4-импульса частицы. При любом  $\Theta$  полная энергия частицы  $E$  равна произведению полного импульса  $P$  на скорость движения  $c$  по винтовой линии:

$$E = pc = \frac{mc^2}{|\cos \Theta|} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (7)$$

Именно этой величине равна полная релятивистская энергия частицы. Заметим, что отношение полной энергии к полному импульсу частицы оказывается таким же, как и для фотона, что является ещё одним общим свойством света и вещества.

Будем считать, что противоположно заряженные частицы вращаются вокруг оси трубки движения в противоположных направлениях. Частицы и античастицы имеют противоположные заряды и вращаются в противоположных направлениях. При обращении времени вспять частица должна будет двигаться вспять по своей траектории – винтовой линии – и поэтому вращаться в противоположном направлении. Значит, и знак её заряда должен будет измениться на противоположный, так что частица должна будет превратиться в свою античастицу. При этом движение частицы будет зеркально отражённым. Совокупность всех этих свойств частиц и античастиц составляют содержание СРТ-теоремы (здесь  $S$  означает изменение знака заряда,  $T$  – отражение в зеркале,  $R$  – обращение времени).

Поскольку частицы и античастицы вращаются в противоположных направлениях, то возможно их лобовое столкновение в подпространстве  $Y$  и последующее их взаимное рассеяние в подпространство  $X$ , в простейшем случае в виде двух фотонов суммарной энергии  $2mc^2$ , равной суммарной энергии исходных частиц. Такой процесс наблюдается на опыте и называется аннигиляцией. Заметим, что при этом в



полном пространстве соблюдаются все законы сохранения – энергии, импульса и момента импульса.

Перемещение частицы на интервал  $ds$  по направляющей трубки движения и соответствующий ему поворот на центральный угол  $d\phi = ds/a$ , где  $a$  – радиус поперечного сечения трубки, являются инвариантами (не зависят от системы отсчёта). Инвариантность интервала является исходным пунктом теории относительности. Шестимерная трактовка делает эту инвариантность очевидной: угол поворота  $\phi$  частицы вокруг оси трубки не зависит от скорости наблюдателя относительно данной частицы.

Обозначим через  $dx$  в системе отсчёта  $K$  проекцию перемещения  $d\zeta$  частицы по поверхности трубки на её образующую и применим теорему Пифагора к прямоугольному треугольнику на поверхности трубки, представленному на рис. 3. В результате получим выражение для интервала

$$(ds)^2 = (cdt)^2 - (dx)^2,$$

основополагающее в теории относительности.

Проецируя стороны представленного на рис. 3 прямоугольного треугольника на траекторию частицы, находим

$$s \cos\theta + x \sin\theta = \zeta. \quad (8)$$

Выберем начальные условия в виде  $t = \tau = 0$  при  $x = s = 0$ . Им соответствуют в согласии с (3) и (4) соотношения

$$s = \pm c\tau, \quad \zeta = ct. \quad (9)$$

Подставив (1) и (9) в (8), получим преобразование Лоренца во времени

$$\tau = \pm [t - (x/c) \sin\theta] / \cos\theta = [t - (xv/c^2)] / \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Аналогичное рассуждение применительно к системе отсчёта  $K'$  с учётом того, что система  $K$  движется относительно рассматриваемой частицы со скоростью  $-v$ , приводит к обратному преобразованию

$$t = \pm [\tau + (x'/c) \sin\theta] / \cos\theta = [\tau + (x'v/c^2)] / \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

где  $x'$  – координата вдоль образующей в системе  $K'$ . Переходу от системы  $K$  к системе  $K'$  соответствует поворот на угол  $-\theta$  вокруг точки  $x = s = 0$

координатной сетки  $x, s$  на поверхности трубки движения вместе с траекториями частиц на ней, который переводит винтовую траекторию в направляющую трубки.

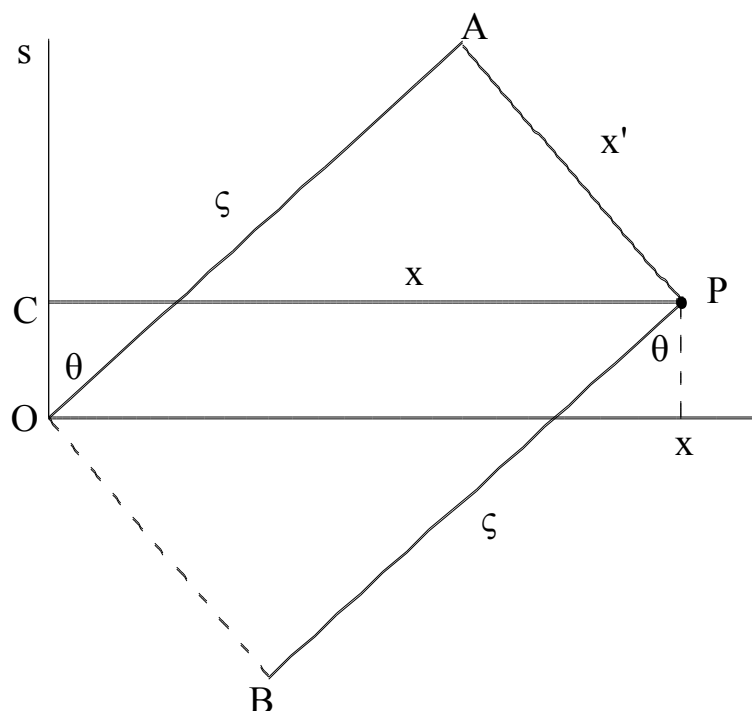


Рис.4.

Развёртка цилиндра, представленного на рис. 3:  $x$  и  $s$  (интервал) – координаты частицы вдоль образующей и направляющей цилиндра в неподвижной системе отсчёта;  $x'$  – то же вдоль образующей в системе отсчёта, связанной с частицей.  $OC = s$ ,  $BP = OA = \zeta$ ,  $CP = x$ ,  $AP = OB = x'$ .

Для геометрической интерпретации и остальных преобразований Лоренца рассмотрим траекторию частицы  $P$  движущейся вдоль трубки с той же скоростью  $v$  и пересекающей в момент  $t = 0$  винтовую линию  $s \cos\theta + x \sin\theta = 0$  в произвольной её точке. В системе отсчёта неподвижного (разумеется, в  $X$ ) наблюдателя  $K$  траектории, составляющие угол  $\theta$  с направляющей, являются линиями постоянных значений координаты  $x'$  системы  $K'$ . Координата  $x'$  отсчитывается по винтовой линии, описываемой уравнением (8). Отсчет ведётся от нормального сечения трубки  $x = vt = \zeta \sin\theta$  до сечения, которого частица достигает в момент времени  $t$ . На рис. 4, изображающем развёртку

трубки движения,  $x'(t)$  представлено отрезком  $AP$ , а  $x(t)$  – отрезком  $CP$ . Проецируя эти отрезки, отрезок  $BP = \zeta$  траектории частицы и отрезок  $OC = s$  направляющей на образующую и направляющую трубки, траекторию частицы и перпендикулярное к траектории направление (вдоль  $x'$ ), получим при  $\cos\theta > 0$ :

$$\begin{aligned} x' \cos\theta + \zeta \sin\theta &= x, & s \cos\theta + x \sin\theta &= \zeta, \\ \zeta \cos\theta - x' \sin\theta &= s, & x \cos\theta - s \sin\theta &= x'. \end{aligned}$$

Поделив эти равенства на  $\cos\theta$  и исключив  $s, \zeta$  и  $\theta$  посредством (1) и (9), согласно которым в рассматриваемом случае

$$s = c\tau, \quad \zeta = ct, \quad \sin\theta = v/c, \quad \cos\theta = \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

получим преобразования Лоренца

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) / \sqrt{1 - (v/c)^2}, & \tau &= \left[ t - (xv/c^2) \right] / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \\ t &= \left[ \tau + (x'v/c^2) \right] / \sqrt{1 - (v/c)^2}, & x &= (x' + vt) / \sqrt{1 - (v/c)^2}. \end{aligned}$$

Положение указанных отрезков на трубке движения представлено на рис. 5.

Собственная длина движущегося твёрдого масштаба есть разность координат  $x'$  его концов и в системе  $K$  равна длине отрезка винтовой линии, ортогональной траекториям движущихся с ним частиц, – линии одинакового времени системы отсчёта  $K'$ , связанной с частицами, между нормальными сечениями трубки движения, соответствующим этим концам. Длина того же движущегося масштаба в неподвижной системе отсчёта – это разность координат  $x$  его концов, равная расстоянию по образующей между указанными сечениями, что в  $1/\cos\theta$  раз меньше, чем собственная длина.

Таким образом, лоренцово сокращение движущихся масштабов оказывается результатом проецирования длин в многомерном пространстве на трёхмерное пространство. Разновременность пространственно разнесённых событий в одной системе отсчёта при одновременности их в другой интерпретируется непараллельностью винтовых линий одинакового времени в движущихся одна относительно другой системах отсчёта.

Рис. 5



Единственной и естественной частотой  $\nu$  для частицы вещества является частота её оборотов в дополнительном подпространстве  $Y$ . С другой стороны, рассматриваемая частица движется в  $Y$  со скоростью света  $c$  и поэтому частота  $\nu$  связана с радиусом  $a$  поперечного сечения трубки движения соотношением  $2\pi a = c/\nu$ . Исключив отсюда и из (10) частоту  $\nu$ , найдём, что длина направляющей трубки равна комптоновской длине волны:  $2\pi a = h/mc$ .

Расположенная на той же трубке движения винтовая линия, проходящая через частицу и перпендикулярная винтовой траектории частицы, является линией одинакового текущего времени системы отсчёта  $K'$ . Эта линия движется вдоль трубки со скоростью волн де Бройля  $V_\phi = c/\sin\theta = c^2/\nu$ , где  $\nu$  – скорость частицы в подпространстве  $X$ . Интерференция этих волн (их сложение с учётом фаз волн) описывает, в частности, рассеяние электронов, налетающих на кристалл со скоростью  $\nu$ . Шаг  $\ell$  этой винтовой линии равен длине волны де Бройля

$$\ell = 2\pi a |\operatorname{ctg}\theta| = \frac{h}{mc} |\operatorname{ctg}\theta| = \frac{h}{p_x} = \frac{h}{|mv|} \sqrt{1 - (\nu/c)^2},$$

как это видно из (6) и рис. 1. Угловая координата  $s/a$  винтовой линии, описываемой формулами (8) и (9), равна

$$\frac{s}{a} = \frac{\zeta}{a \cos\theta} - \frac{x}{a} \operatorname{tg}\theta = \frac{s}{a} = t \frac{mc^2}{\hbar \cos\theta} - x \frac{mc}{\hbar} \operatorname{tg}\theta,$$

где  $\hbar = h/2\pi$ . Отсюда и из (6) и (7) видно, что эта угловая координата равна фазе волны де Бройля  $\pm [Et - p_x(x/\hbar)]$ . В месте нахождения частицы  $x = \nu t$  эта фаза есть угол поворота самой частицы на трубке движения. Отметим, что функция  $\exp(is/a)$  удовлетворяет уравнению Клейна – Гордона – основополагающему уравнению релятивистской квантовой механики.

Момент импульса  $\mathbf{J}$  частицы равен векторному произведению импульса и радиус-вектора частицы. Составляющая радиус-вектора вдоль оси трубки движения частицы параллельна импульсу и поэтому не вносит вклада в  $\mathbf{J}$ , так что для частицы, движущейся в шестимерном пространстве по винтовой линии, а значит, прямолинейно в проекции на подпространство  $X$ ,  $\mathbf{J}$  есть векторное произведение

проекций импульса и радиус-вектора частицы на подпространство  $Y$ . При этом величина момента импульса равна

$$J = |\mathbf{J}| = |p_y a| = mc \hbar / mc = \hbar.$$

Эта формула оставляет известный произвол в ориентации вектора  $\mathbf{J}$  в шестимерном пространстве: он может быть ориентирован по любым направлениям четырёхмерного подпространства, все направления в котором перпендикулярны плоскости вращения частицы в  $Y$ , т. е. поперечному сечению трубки движения. Момент импульса  $\mathbf{J}$  в общем случае имеет четыре ненулевые компоненты по направлениям, перпендикулярным одно другому и плоскости вращения частицы. В случае вращения в плоскости  $y_2, y_3$  такими компонентами будут компоненты  $J_1, J_2, J_3, J_4$  по осям  $x_1, x_2, x_3, y_1$  соответственно. При этом

$$J = \left( J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 + J_4^2 \right)^{1/2} = \hbar.$$

Компоненты  $J_1, J_2, J_3$  являются компонентами спина частицы, компонента  $J_4$  есть проекция изоспина частицы, поскольку спин есть проекция вектора  $\mathbf{J}$  на подпространство  $X$ , а изоспин – проекция вектора  $\mathbf{J}$  на подпространство  $Y$ .

Согласно (6)  $p_y$  не зависит от скорости  $v$ , поэтому спин и изоспин не зависят от  $v$  и преобразованиям Лоренца не подвергаются.

Вектор  $\mathbf{J}$ , оставаясь перпендикулярным к плоскости вращения частицы, обладает тремя степенями свободы и может быть ориентирован произвольным образом по указанным четырём осям координат. Простейшие способы его ориентации таковы:

а) вектор  $\mathbf{J}$  не имеет компонент в  $X$  и целиком расположен в  $Y$ ; тогда спин частицы равен нулю, а изоспин – единице, как у  $\pi$ -мезона.

б) вектор  $\mathbf{J}$  не имеет компонент в  $Y$  и целиком расположен в  $X$ ; тогда спин частицы равен единице, а изоспин – нулю, к этому случаю относится фотон;

в) частицам со спином  $1/2$  соответствует равномерное распределение компонент вектора по четырём осям, перпендикулярным друг другу и плоскости вращения частицы. Тогда эти компоненты равны  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ , а сумма квадратов компонент в  $X$  равна  $(3/4)\hbar^2$ , что совпадает с так называемым в квантовой

механике квадратом "полного" (в трёхмерном пространстве) собственного момента импульса частицы. Сюда же относятся и ориентации вектора  $\mathbf{J}$ , получающиеся из предыдущей допустимыми поворотами, оставляющими одну или две заданные компоненты неизменными. Так, если одна из компонент вектора в  $X$  и одна из его компонент в  $Y$  имеют фиксированное значение  $+\hbar/2$  или  $-\hbar/2$ , то у вектора остаётся ещё возможность вращения вокруг двух соответственных осей. При этом оставшиеся незафиксированными две компоненты вектора не будут иметь определённого значения (ситуация типичная для квантовой механики, когда фиксированное значение величины является скорее исключением, чем правилом); при равновероятной допустимой ориентации этого вектора среднеквадратичные значения указанных компонент равны  $\hbar/2$ . Изменение направления вращения вокруг оси трубки движения на противоположное также меняет знаки компонент на противоположные и соответствует переходу к античастице.

Соотношения неопределённостей Гейзенберга обусловлены неопределённостью координат и импульсов частиц в  $Y$ , которые подчиняются этим соотношениям. Действительно, пусть направляющая трубки движения частицы расположена в плоскости  $y_2, y_3$ . Тогда координаты частицы по осям  $y_2, y_3$  и проекции импульса частицы на эти оси соответственно равны

$$y_2 = \frac{\hbar}{mc} \cos\phi, \quad y_3 = \frac{\hbar}{mc} \sin\phi, \quad p_{y2} = -mc \sin\phi, \quad p_{y3} = mc \cos\phi,$$

где  $\phi$  — угол поворота частицы вокруг оси трубки, отсчитываемый от оси  $y_2$ .

Средние по  $\phi$  значения координат и проекций импульсов равны нулю, а их средние квадраты соответственно равны

$$\langle y_2^2 \rangle = \langle y_3^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2, \quad \langle p_{y2}^2 \rangle = \langle p_{y3}^2 \rangle = \frac{1}{2} (mc)^2,$$

откуда следуют искомые соотношения

$$\langle p_{y2}^2 \rangle \cdot \langle y_2^2 \rangle = \langle p_{y3}^2 \rangle \cdot \langle y_3^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Интересен вопрос: почему величина собственного момента импульса и его компоненты в  $X$  и  $Y$ , т. е. спин и изоспин не зависят от массы элементарной

частицы? В шестимерной трактовке ответ очевиден: импульс пропорционален массе частицы, а радиус комптоновской орбиты такой частицы обратно пропорционален этой массе и поэтому произведение импульса и радиуса орбиты от массы не зависит.

Собственный магнитный момент  $\boldsymbol{\mu}$  заряженной элементарной частицы определяется аналогично собственному моменту импульса  $\mathbf{J}$ . А именно, по известной формуле электродинамики [7]

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} [\mathbf{R} \mathbf{c}], \quad (11)$$

где  $\mathbf{R}$  – радиус-вектор частицы,  $\mathbf{c}$  – вектор её скорости в подпространстве  $Y$ ,  $[\mathbf{R} \mathbf{c}]$  – векторное произведение векторов  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{c}$ ,  $e$  – заряд частицы. Поскольку вклад в векторное произведение в (11) даёт только проекция  $\mathbf{a}$  радиус-вектора  $\mathbf{R}$  на  $Y$ , вектор  $\boldsymbol{\mu}$  равен

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2c} [\mathbf{a} \mathbf{c}].$$

Отсюда, учитывая взаимную перпендикулярность векторов и равенства  $|\mathbf{a}| = a$  и  $|\mathbf{c}| = c$ , получим величину  $\mu$  собственного магнитного момента  $\boldsymbol{\mu}$  частицы, которая, как оказывается, равна магнетону Бора:

$$\mu = \frac{|e|a}{2} = \frac{|e|\hbar}{2mc} = \mu_B. \quad (12)$$

В простейшем случае, когда вектор  $\boldsymbol{\mu}$  не имеет компонент в подпространстве  $Y$ , его компоненты в  $X$  определяют трёхмерный вектор, величина которого равна магнетону Бора. Проекция магнитного момента на произвольно выделенное направление (так называемая ось квантования) в подпространстве  $X$  может иметь фиксированное значение ( $\mu_x$ ) только в случае, когда проекция собственного момента импульса  $J_x$  на это направление также имеет фиксированное значение. Согласно (12) в этом случае  $\mu_x = \pm \mu_B$ . При равномерном распределении компонент собственного момента импульса по четырём осям, перпендикулярным одна другой и плоскости вращения частицы в  $Y$ , в рассматриваемом случае  $J_x = \pm mca/2$ , что равно  $+1/2$  или  $-1/2$  (в единицах  $\hbar$ ), откуда  $\mu_x/J_x = e/mc$  в соответствии с данными опыта Штерна и Герлаха.



Кроме вращения в  $Y$  по орбитам комтоновского радиуса, электроны в атоме совершают движение в  $X$  по орбитам гораздо большего (в сотни раз) радиуса.

Размеры атомов равны размерам их внешних электронных орбит в  $X$ . Покажем, что для водородоподобного атома (атома, имеющего только один внешний электрон) стационарное (установившееся) движение электрона в проекции на  $X$  определяет квазиборовскую орбиту Зоммерфельда [8].

Трубка движения внешнего электрона водородоподобного атома в простейшем случае является замкнутой поверхностью, которая в проекции на  $X$  есть окружность с центром в ядре атома. Эта поверхность, в отличие от обычного тора, сохраняет свойства цилиндра, поскольку все её точки удалены от центра на одинаковое расстояние в полном пространстве. Условие стационарности движения предполагает замкнутость винтовой линии одинакового текущего собственного времени электрона на трубке его движения и имеет вид

$$r \operatorname{tg} \theta = na, \quad (13)$$

где  $r$  – радиус указанной окружности,  $n$  – целое число,  $\theta$  – угол наклона траектории электрона к нормальному сечению трубки,  $a = \hbar/(mc)$ ,  $m$  – масса электрона.

В подпространстве  $X$  на электрон действуют центробежная сила  $p_x v/r$  и кулоновская сила  $-Ze^2/r^2$ , где  $Z|e|$  – заряд ядра атома,  $p_x$  и  $v$  – соответственно импульс и скорость электрона в  $X$ . Приравняв нулю сумму этих сил и учтя (1), (6), (13) и  $e^2 = amc^2\alpha$ , где  $\alpha = e^2/(\hbar c)$  – постоянная тонкой структуры, найдём

$$\text{соотношения} \quad \sin \theta = Z\alpha/n, \quad na/r = \operatorname{tg} \theta = Z\alpha/\sqrt{n^2 - Z^2\alpha^2}.$$

Отсюда радиус орбиты электрона  $r = r_n$  и полная энергия электрона  $E_n$  (сумма его потенциальной энергии  $-Ze^2/r$  и энергии движения  $mc^2/\cos \theta$ ) соответственно равны

$$r_n = \frac{n^2 a}{Z\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2} = \frac{n^2 \hbar^2}{Zme^2} \sqrt{1 - \left(\frac{Z\alpha}{n}\right)^2}, \quad (14)$$

$$E_n = mc^2 \cos \theta = mc^2 \sqrt{1 - (Z\alpha/n)^2}. \quad (15)$$

Формула (15) есть частный случай формулы тонкой структуры при нулевом радиальном квантовом числе  $n_r = 0$  [8]. Приближённое выражение для борховской орбиты мы получим, если в (14) пренебрежём малым отличием  $\sqrt{1 - (Z\alpha/n)^2}$  от единицы. Переход электрона с более высокой орбиты номера  $k$  на более низкую орбиту номера  $n$  приводит к излучению кванта энергии света  $h\nu_{kn} = E_k - E_n$  на частоте  $\nu_{kn}$ . Отсюда получим формулу тонкой структуры

$$\nu_{kn} = \frac{E_k - E_n}{h} = Z^2 R \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \frac{2}{\sqrt{1 - (Z\alpha/k)^2} + \sqrt{1 - (Z\alpha/n)^2}}, \quad (16)$$

где  $R = 2\pi^2 e^4 m / h^3$  – постоянная Ридберга. Пренебрежение в (16) малым отличием последнего множителя в правой части формулы (16) от единицы даёт (приближённую) сериальную формулу Бальмера – Ридберга.

Протон и нейтрон имеют одинаковые размеры, а ядро у них отсутствует [9]. Объяснить это просто. Они состоят из трёх кварков, хотя и в разных комбинациях. Протон состоит из двух  $u$ -кварков и одного  $d$ -кварка, нейтрон – из одного  $u$ -кварка и двух  $d$ -кварков. Кварки движутся в подпространстве  $Y$  по своим орбитам комптоновского радиуса, обратно пропорционального массе кварка. Самым лёгким из кварков является  $d$ -кварк. Он и определяет одинаковый размер протона и нейтрона. Поскольку кварки движутся на расстоянии (комптоновском) от центра вращения, в центре протона и нейтрона – пустота. Так как  $u$ -кварк и  $d$ -кварк имеют разноименные заряды ( $2e/3$  и  $-e/3$  соответственно), то суммарный заряд у нейтрона обращается в нуль, но нет причин для обращения в нуль его результирующего магнитного момента. Большие магнитные моменты протона и нейтрона обусловлены относительно большими магнитными моментами составляющих их кварков.

Двум электронам, находящимся на одной трубке движения, энергетически выгодно располагаться на противоположных сторонах трубки. При этом расстояние между ними в полном пространстве будет равно  $R = \sqrt{r^2 + 4a^2}$ , где  $r$  – расстояние в подпространстве  $X$  между проекциями частиц на него,  $a$  – радиус

окружностей, по которым частицы вращаются в подпространстве  $Y$ , зависящий от  $r$  и с увеличением  $r$  асимптотически стремящееся к  $a_\infty = \hbar/(mc)$ , где  $m$  и  $c$  – масса и скорость частицы на бесконечности. При таком вращении в противофазе кулоновская сила отталкивания между двумя электронами в полном пространстве равна  $e^2/R^2$ , где  $e$  – заряд электрона, а скорости вращения в  $Y$  равны по величине и противоположны по направлению. Проекция этой силы на подпространства  $X$  и  $Y$  соответственно равны  $F_{\parallel} = (e^2/R^2)\sin\chi$ ,  $F_{\perp} = (e^2/R^2)\cos\chi$ , где  $\sin\chi = r/R$ ,  $\cos\chi = 2a/R$ , так что  $F_{\parallel} = e^2r/R^3$ ,  $F_{\perp} = 2e^2a/R^3$ . Перпендикулярная к  $X$  сила  $F_{\perp}$  противостоит центростремительной силе  $F_0 = mc^2/a_\infty$ . Поэтому радиус  $a$  несколько превышает радиус трубки движения на бесконечности  $a_\infty$ .

Энергия покоя и центробежная сила в  $Y$  соответственно равны

$$E_0 = p_y c_\zeta = mc^2 \sqrt{\gamma} \text{ и } F_c = p_y c_\zeta / a = E_0 / a, \text{ где } c_\zeta \text{ – скорость частицы на}$$

трубке движения,  $p_y = \hbar/a$  – импульс покоя,  $\sqrt{\gamma} = c_\zeta a_\infty / ca$ , так что

$$c_\zeta = ca \sqrt{\gamma} / a_\infty.$$

Баланс сил в  $Y$  имеет вид  $F_0 = F_{\perp} + F_c$ . Принимая во внимание соотношение

$$e^2/mc^2 = \alpha a_\infty \text{ (это классический радиус электрона, } \alpha \text{ есть постоянная тонкой}$$

структуры) и введя переменную  $z = a/a_\infty$ , баланс сил может быть представлен в

$$\text{виде } \sqrt{\gamma} = z - 2 \frac{\alpha}{\rho^3} z^2, \text{ где } \rho = \sqrt{(r/a_\infty)^2 + 4z^2}, \quad r = a_\infty \sqrt{\rho^2 - 4z^2}, \quad r \text{ – есть}$$

трехмерное расстояние. Из условия сохранения углового момента  $c_\zeta a = ca_\infty$  имеем

$$c_{\zeta} = c/z, \quad \sqrt{\gamma} = 1/z^2, \quad \frac{1}{z^2} = z - 2 \frac{\alpha}{\rho^3} z^2 \quad (17)$$

При  $r = 0$   $\rho = 2z$  и тогда из (17) получим уравнение  $z^3 - \frac{\alpha}{4}z - 1 = 0$ , откуда

$$z = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{6}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{6}\right)^3}} = 1 + \frac{\alpha}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{12}\right)^3 + \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{12}\right)^4 + \dots,$$

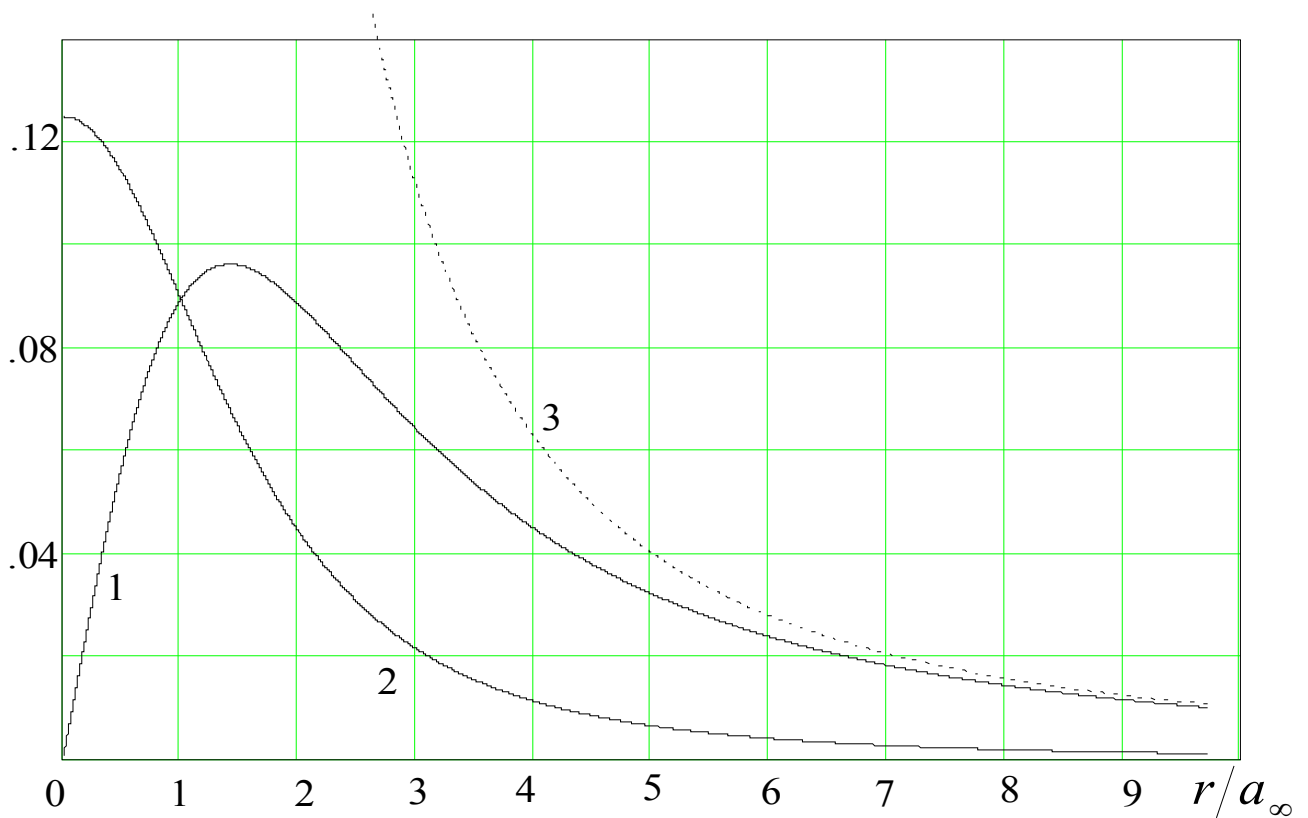
что равно 1.0006081. С увеличением  $r$  величина  $z$  монотонно уменьшается и стремится к единице. Действительно, выразив  $\rho$  через  $z$  посредством формулы (17),

найдем явное выражение  $r$  через параметр  $z$ :  $r = a_{\infty}z\sqrt{\left[2\alpha z/(z^3 - 1)\right]^{2/3} - 4}$ ,

откуда и виден характер взаимозависимости указанных величин.

На рис. 6 представлены кривыми 1 и 2 соответственно безразмерные функции  $F_{\parallel} a_{\infty}^2/e^2 = r a_{\infty}^2/R^3$ ,  $F_{\perp} a_{\infty}^2/2e^2 = a_{\infty}^2 a/R^3$  и пунктирной кривой 3 функция  $a_{\infty}^2/r^2$  в зависимости от безразмерной переменной  $r/a_{\infty}$ . На рисунке видно, что при больших  $r/a_{\infty}$  кривая 1 асимптотически стремится к кривой 3, соответствующей классической формуле кулоновского взаимодействия, достигает максимума при  $r/a_{\infty} = 1.415$ , а с уменьшением  $r/a_{\infty}$  стремится к нулю при  $r = 0$ .

Рис. 6



1 – функция  $F_{\parallel} a_{\infty}^2 / e^2 = r a_{\infty}^2 / R^3$  в зависимости от безразмерной переменной  $r/a_{\infty}$ . 2 – функция  $F_{\perp} a_{\infty}^2 / 2e^2 = a_{\infty}^2 a / R^3$ . 3 – функция  $a_{\infty}^2 / r^2$ , соответствующая классической кулоновской силе.

В применении формулы Био – Савара к шестимерному пространству полное магнитное поле неподвижного в подпространстве  $X$  заряда  $e$  на расстоянии  $R$  от

него определяется как  $\mathbf{H}_{\text{tot}} = \frac{e}{cR^2} [\mathbf{c} \mathbf{R}_0]$ , где  $\mathbf{R}_0$  – единичный вектор вдоль радиус-

вектора  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 \sin \chi + \mathbf{a}_0 \cos \chi = \mathbf{r}_0 (r/R) + \mathbf{a}_0 (2a/R)$ ,  $\mathbf{r}_0$  – единичный вектор вдоль радиус-вектора  $\mathbf{r}$  в  $X$ ,  $\mathbf{a}_0$  – единичный вектор вдоль радиус-вектора  $\mathbf{a}$  в плоскости вращения в  $Y$ ,  $\mathbf{c}$  – вектор скорости движения заряда в  $Y$ , так что

$$\mathbf{H}_{\text{tot}} = \frac{e}{R^2} [\mathbf{c}_0 \mathbf{R}_0] = \frac{e}{R^2} \{ [\mathbf{c}_0 \mathbf{r}_0] (r/R) + [\mathbf{c}_0 \mathbf{a}_0] (2a/R) \}, \quad (18)$$

где  $\mathbf{c}_0$  – единичный вектор вдоль скорости  $\mathbf{c}$ . Покажем, что кулоновская сила взаимодействия между двумя зарядами  $e$  и  $e'$  есть сила Лоренца, действующая на заряды, движущиеся в  $Y$ . Согласно (18) она равна

$$\mathbf{f} = (e'/c) [\mathbf{c}'\mathbf{H}_{\text{tot}}] = (e'e/cR^2) \{ [\mathbf{c}' [\mathbf{c}_0 \mathbf{r}_0]](r/R) + [\mathbf{c}' [\mathbf{c}_0 \mathbf{a}_0]](2a/R) \}$$

или, с учётом того, что для двух взаимодействующих электронов  $\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$ ,

$$\mathbf{f} = -(e'e/R^2) \{ [\mathbf{c}_0 [\mathbf{c}_0 \mathbf{r}_0]](r/R) + [\mathbf{c}_0 [\mathbf{c}_0 \mathbf{a}_0]](2a/R) \}, \quad \text{где} \quad \mathbf{c}'_0 \quad -$$

единичный вектор вдоль скорости  $\mathbf{c}'$ . Раскрывая здесь двойные векторные произведения и принимая во внимание взаимную перпендикулярность входящих в них векторов, в итоге получим

$$[\mathbf{c}_0 [\mathbf{c}_0 \mathbf{r}_0]] = -\mathbf{r}_0, \quad [\mathbf{c}_0 [\mathbf{c}_0 \mathbf{a}_0]] = -\mathbf{a}_0, \quad \mathbf{f} = (e'er/R^3) \mathbf{r}_0 + (e'e2a/R^3) \mathbf{a}_0.$$

В последней формуле первое слагаемое представляет проекцию кулоновской силы на  $X$ , второе слагаемое – её проекцию на  $Y$ . При  $e' = e$  величины их соответственно равны  $F_{\parallel}$  и  $F_{\perp}$ . Отсюда видно, что электрические силы в  $X$  обусловлены движением зарядов в  $Y$ , в отличие от магнитных сил в  $X$ , обусловленных движением зарядов в том же подпространстве  $X$ .

В шестимерной трактовке заряды частиц и античастиц одинаковы, но знак электрического или магнитного поля определяется направлением вращения частиц в дополнительном пространстве по окружности комптоновского радиуса. Знак заряда в данной трактовке оказывается всего лишь меткой, соответствующей направлению вращения. При обращении времени (если бы обращение времени вспять было возможным) частица движется в полном пространстве вспять по той же траектории, что и при прямом ходе времени. При этом автоматически изменяются на противоположные знаки полей, а траектория по ходу движения оказывается зеркально отраженной, и частица приобретает все свойства античастицы.

Шестимерная трактовка рассмотренных и ряда других физических величин и явлений изложена в [10-16].

## Литература

1. А. А. Марголин. Принцип простоты// Химия и жизнь. 1981. № 9. С. 79.

2. F. Klein. Uber neuere englische Arbeiten zur Gesammelte matematische Abhandlungen, B.2, Springer, Berlin, 1922, 601 S.// Zeit. f. Math. u. Phys. 1901. S. 375.
3. Ф. Клейн, Высшая геометрия. М.-Л.: Гостехиздат, 1939, 219 с.
4. Ю. Б. Румер, Исследования по 5-оптике. Гостехиздат, М., 1956.
5. Роберт Орос ди Бартини. Некоторые соотношения между физическими константами. //ДАН СССР. 1965. Т. 163. № 4. С. 861-865.
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика, Электродинамика. М.: Наука, 1969.
7. И. Е. Тамм. Основы теории электричества. М. – Л.: Гостехиздат, 1949.
8. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1956.
9. Ю. А. Мостовой, К. Н. Мухин, О. О. Татаркин. Нейтрон вчера, сегодня, завтра. // Успехи Физических наук. 1996. Т. 166. № 9. С. 987-1022.
10. И. А. Урусовский. Шестимерная трактовка кварковой модели нуклонов. // Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 1999. № 6. С. 64-74.
11. И. А. Урусовский. Шестимерная трактовка расширения Вселенной// Зарубежная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники. 2000. № 6. С. 66-77.
12. И. А. Урусовский. Космологическая природа тяготения в его шестимерной трактовке. /Российское акустическое общество. Сб. трудов семинара научной школы проф. С. А. Рыбака. Москва, 2000. С. 173-181.
13. I. A. Urusovskii, "Gravity as a projection of the cosmological force", Proceedings of PIRT International Scientific Meeting. 359-367 (Bauman University, Moscow, June 30 – July 03, 2003).
14. И. А. Урусовский. Матрицы Дирака в свете шестимерной трактовки спина и изоспина. Proceedings of International Scientific Meeting "Number, Time, Relativity". Bauman MSTU, Moscow: August 10– 13, 2004. P. 55-57.
15. И. А. Урусовский. Принцип суперпозиции гравитационных потенциалов и время падения элементарной частицы на центр тяготения в шестимерной трактовке тяготения. /Российское акустическое общество. Сб. трудов семинара научной школы проф. С. А. Рыбака. Москва, 2004. С. 206-212

16. И. А. Урусовский. Закон Кулона в его шестимерной трактовке, доступной экспериментальной проверке. /Российское акустическое общество. Сб. трудов семинара научной школы проф. С. А. Рыбака. Москва, 2004. С. 193-207.