Принципы дискретной механики микромира*

А.Л. Круглый†

УДК 530.12 : 539.12

Аннотация

Рассматриваются первичные принципы, на базе которых построена модель предгеометрии. Модель является развитием модели причинностного множества. Рассмотрены свойства модели. Сформулированы принципы стохастической динамики.

*Проблемы физики и физических технологий: Сборник научных трудов. Под ред. В.А. Лурье. - М.: Изд-во МГОУ, с. 65-161, 2010.

†akrugly@mail.ru

Содержание

1 Введение

Фундаментальной проблемой современной теоретической физики является противоречие между релятивисткой теорией пространства-времени и гравитации и квантовой теорией микромира. Исходя из представлений о единстве мира, можно надеяться на создание более общей теории, часто называемой «теорией всего», которая будет охватывать области применимости релятивистской и квантовой теорий. Однако, многочисленные попытки создания такой теории к настоящему времени не увенчались успехом. Одной из причин может быть недостаточно радикальная модификация концепций и аппарата релятивистской и квантовой теорий. История физики показывает, что качественно новая теория не может быть получена в рамках прежней парадигмы. Типичный пример приведен в книге «Гравитация» [1], п. 44.4, с. 475-477. Последовательное совершенствование теории упругости не может привести к теории атомного строения вещества. С другой стороны, попытки создания радикально новой теории не привели к построению какой-либо последовательной теории, возможно, из-за отсутствия полного набора базовых принципов.

Целью настоящей работы является поиск базовых принципов «теории всего» и построение на их основе модели микромира. В качестве метода использован анализ наиболее фундаментальных концепций современной теоретической физики. Модель строится на основании базовых принципов без привлечения дополнительных идей о соответствии существующим теориям и экспериментальным данным. Исследование такого соответствия должно проводиться для логически завершенной теории.

2 Первичные понятия

2.1 Принцип простоты

Наиболее глубоким принципом теоретической физики является принцип простоты. В «теории всего» он должен быть воплощен в полной мере. «Какой-то принцип, единственно верный и единственно простой, когда он нам станет известен, будет также столь очевидным, что не останется сомнений: Вселенная устроена таким-то и таким-то образом и должна быть так устроена, а иначе и быть не может» [1], п. 44.5, с. 477.

Принцип простоты тесно связан с идеей безальтернативности «теории всего». Над этой идеей размышлял Эйнштейн: «Мог ли Бог сотворить мир другим, оставляет ли какую-то свободу требование логической простоты?» [2], с. 363. На реализацию этого принципа в теории суперструн надеются ее адепты. «Окончательная теория должна иметь тот вид, который она имеет, потому что она дает уникальную формулировку, в рамках которой можно объяснить Вселенную, не натыкаясь на внутренние или логические противоречия. В подобной теории должно постулироваться, что все вокруг устроено именно так потому, что должно быть устроено именно так. Любое сколь угодно малое расхождение приводит к теории, которая, подобно фразе «это предложение является ложным», содержит в себе семена своей собственной несостоятельности» [3], гл. 12, с. 187.

Принцип простоты является наиболее общим принципом и играет роль метапринципа при поиске системы более частных принципов.

2.2 Конечные явления

Анализ окружающего мира основан на разделении мира на отдельные явления, что приводит к понятию единичного явления. С этим разделением связаны такие базовые математические понятия, как единица, элемент множества. Множественность явлений приводит к понятию множеств, положительных целых чисел. «...есть все основания считать идею множества одной из самых основных и самых первоначальных форм мышления» [4], с. 6.

В общем случае единичное явление, выделенное из состава Вселенной, в свою очередь может быть разделено на явления более глубокого уровня. Представление о бесконечной делимости приводит к модели явления, как континуального множества мировых точек. Такая модель означает бесконечную сложность любого явления, содержащего бесконечное число степеней свободы, и требующего для своего точного описания бесконечного объема информации. Указанная бесконечность находится в противоречии с принципом тождественности элементарных частиц, согласно которому элементарные частицы описываются конечным числом квантовых чисел и неотличимы при их совпадении. Вероятно, проявлением неадекватности континуального описания являются расходимости в квантовой теории поля.

Альтернативой бесконечной делимости является локальная конечность. Любое ограниченное явление содержит только конечное число первичных элементов.

Локально конечная Вселенная может быть бесконечной, то есть содержать счетное множество первичных элементов. Однако, наблюдатель может обрабатывать только конечные объемы информации. В частности, на уровне отдельных первичных элементов могут анализироваться только конечные множества первичных элементов. Физическая модель не имеет смысла безотносительно к возможностям наблюдателя, возможно гипотетическим, идеализированным. Поэтому в основе «теории всего» должны лежать операции с конечными множествами первичных элементов. При этом влияние остальной Вселенной должно учитываться каким-либо приближенным образом. Конечные множества первичных элементов порождают другие конечные множества, например, множества подстановок первичных элементов. Количественный анализ конечных множеств сводится к подсчету числа элементов этих множеств. Непосредственный физический смысл имеют только неотрицательные целые числа. Таким образом, первой группой первичных принципов являются аксиомы конечных множеств и целых чисел. Факт сводимости арифметики к теории множеств несущественен для целей настоящей работы. В практических вычислениях могут использоваться расширения множества неотрицательных целых чисел как удобный вычислительный прием.

Отметим, что предлагаемый подход в некотором смысле аналогичен представлениям классической греческой математики. Понятие числа относилось только к положительным целым числам. «Отношения целых чисел в классической греческой математике рассматривались как операторы, определенные на множестве целых чисел или его подмножестве...» [5], с. 147. Также отметим, что из рассмотрения исключается «актуальная бесконечность» (то есть множества, содержащие бесконечное число объектов, которые рассматриваются «одновременно» существующими). Если Вселенная бесконечна, то есть состоит из бесконечного числа элементов, то допустимо рассмотрение «потенциальной бесконечности», то есть возможности увеличить каждую данную конечную величину.

Следует подчеркнуть необходимость отказа от исчисления бесконечно малых в «теории всего», в частности, от дифференциального исчисления. Это принципиально макроскопическое описание. В «теории всего» центральную роль должны играть комбинаторные законы на конечных множествах.

Выше обосновывалась локальная конечность Вселенной. Близким понятием является дискретность. На конечном множестве можно ввести понятие непрерывности за счет отказа от аксиомы отделимости Хаусдорфа. Но для физики такие построения являются излишними. На физическом уровне строгости (при выполнении аксиомы отделимости) понятия локальной конечности и дискретности совпадают. Исторически теоретическая физика пользуется понятием дискретности, и далее предлагаемую «теорию всего» будем называть «дискретная механика».

2.3 Бинарные отношения

Другой стороной разделения мира на явления является понятие связи явлений. Явления, не связанные друг с другом каким-либо образом, не существуют друг для друга. Связь элементов в общем случае состоит из связей и элементов более глубокого уровня. В силу конечной делимости мы приходим к первичной связи первичных элементов. Простейшей связью является связь двух элементов - бинарная связь. Связь элемента самого с собой является не связью, а внутренним свойством элемента.

Бинарные отношения имеют выделенный характер. На бинарной логике основано рациональное мышление. Бинарно отношение причина - следствие. В качестве первичного принципа логично взять бинарную первичную связь. Связи большего числа первичных элементов могут строиться из бинарных связей, и их включение в исходные принципы не соответствует принципу простоты.

2.4 Реляционная концепция свойств

Элементарный объект не имеет структуры, следовательно, он не имеет внутренних свойств. Все его свойства - это его связи с другими элементарными объектами. Этот взгляд близок к точке зрения Уайтхеда. «Мы должны начать с события, приняв его за конечную единицу природного явления. Событие должно иметь отношение ко всему существующему, в том числе ко всем другим событиям» [6]. При этом пространство и время не являются самостоятельными сущностями (субстанциональная концепция), а описывают некоторые характеристики связи явлений (реляционная концепция). Этой точки зрения придерживался Лейбниц, полемизируя с Ньютоном. Абсолютное пространство и время Ньютона отвергали Мах и Уайтхед. «Пространство-время является спецификацией некоторых общих характеристик событий в их взаимной упорядоченности» [6]. «Физическое пространство я имею в своем сознании (которое уже включает время), и, следовательно, пространство есть ни что иное, как зависимость явлений друг от друга. Завершенная физика, которой известна эта зависимость, не будет нуждаться в отдельных концепциях пространства и времени, потому что они уже будут включены» [7]. Однако, в современных теориях используется субстанциональная концепция пространства и времени Ньютона, которые трансформировались в пространство-время теории относительности и более сложные конструкции с дополнительными измерениями.

В дискретной механике должна быть реализована последовательная реляционная концепция пространства и времени. Реляционная концепция должна относиться ко всем свойствам первичных элементов. Первичные элементы бесструктурны, и все их свойства заключены в связях друг с другом. Первичные связи также бесструктурны, и все их свойства заключены в их последовательности.

В мире все взаимосвязано. Можно представить ситуацию, когда локально конечное явление, то есть явление, состоящее из конечного числа первичных элементов, связано с другими явлениями бесконечным числом первичных связей. Для этого необходимо, чтобы хотя бы один первичный элемент этого явления имел бесконечное число первичных связей с другими элементами. Подобная модель снова означает бесконечную сложность явлений. Постулируем, что каждый первичный элемент может иметь только конечное число первичных связей, то есть существует конечное число первичных элементов, с которыми он связан непосредственно. Связь с остальными первичными элементами осуществляется посредством последовательностей первичных элементов и связей. Назовем этот принцип «локальная конечность связей».

Математически полученная модель описывается как граф. По определению граф - это множество элементов, называемых вершины, на котором задано бинарное отношение (семейство пар вершин), называемое ребра [8]. Свойства вершин и ребер определяются их положением в графе. Таким образом, все свойства явлений в конечном итоге сводятся к топологии графа первичных элементов. В частности, в теории графов расстоянием между вершинами называется количество ребер в кратчайшем маршруте, связывающем эти вершины. Оно может быть названо «порядок соседства». Одно ребро связывает соседей первого порядка. Таким образом, идея расстояния является производной от локальной конечности связей.

3 Причинность

3.1 Структура причинности

Для замкнутой теории недостаточно бинарных отношений на конечных множествах. Это статичная картина. Целью теории является способ предсказывать по известным состояниям явления его будущие состояния, или реконструировать прошлые, то есть познание динамики процессов. В основе таких предсказаний лежит идея причинности.

Причинность рассматривалась еще в античности. Например, классификация причин анализируется Аристотелем в Метафизике [9]. Причинность является необходимым элементом теории. Однако, она не может быть непосредственно включена в список исходных принципов. Причинность является составным понятием. Она содержит в себе две идеи. Первая - это идея хронологической последовательности событий. События следуют одно за другим. Но одного следования недостаточно. Если последовательность событий совершенно случайна, то причинности нет. События в последовательности должны коррелировать. Поэтому вторая идея, содержащаяся в причинности, - это идея корреляции событий.

3.2 Частичное упорядочение событий

Рассмотрим подробнее идею хронологического порядка. Она обычно описывается понятием времени. Но в реляционной концепции время является вторичным понятием по отношению к связи явлений. «Физической реальностью обладает не точка пространства и не момент времени, когда что-либо произошло, а только само событие » [10], с. 25. Время описывает одну из сторон связи явлений - порядок следования событий. Абсолютному времени Ньютона соответствует линейное упорядочение событий. Релятивистская концепция заменила его частичным упорядочением событий. Относительно каждого события множество остальных событий разбивается на три подмножества: подмножество предшествующих событий (прошлое), подмножество последующих событий (будущее) и подмножество причинно не связанных событий.

Математически отношение частичного упорядочения на множестве элементов есть отношение, обозначаемое $\preceq$, такое, что для любых a, b и c, принадлежащих множеству, справедливы следующие аксиомы:

$$a \preceq a \qquad \text{(рефлективность)}, \tag{1}$$

$$(a \preceq b) \wedge (b \preceq a) \Rightarrow (a = b) \qquad \text{(ацикличность)}, \tag{2}$$

$$(a \preceq b) \wedge (b \preceq c) \Rightarrow (a \preceq c) \qquad \text{(транзитивность)}. \tag{3}$$

Отношение частичного упорядочения мировых точек лежит в основе псевдориманова пространства-времени [11, 12, 13, 14, 15]. Это отношение играет фундаментальную роль в математике. Архитектура математики представляет собой иерархию структур. Отношение порядка является одной из главнейших, порождающих структур [16]. Таким образом, отношение частичного упорядочения множества первичных элементов должно рассматриваться как один из первичных принципов.

3.3 Причинностное множество

Синтез идей дискретного пространства-времени и частичного упорядочения приводит к модели причинностного множества [17, 18, 19]. Причинностное множество, называемое в англоязычной литературе «causal set», есть локально конечное частично упорядоченное множество. Тем самым к аксиомам (1) - (3) добавлена аксиома локальной конечности:

$$|A(a,b)| < \infty \qquad \text{(локальная конечность)}, \tag{4}$$

где $A(a,b)$ - множество Александрова элементов a и b, то есть множество элементов c таких, что $a \preceq c \preceq b$. Локальная конечность означает, что множество Александрова любой пары элементов содержит конечное число элементов.

С учетом в параграфа 2.2 моделями физических явлений являются конечные причинностные множества. Тем самым аксиома (4) может быть заменена более сильным условием конечности всего рассматриваемого множества.

Для причинностного множества C принята следующая терминология [20]. Прошлым элемента a называется множество $past(a) = \{b \in C|(b \preceq a)\}$. Это дискретный аналог светового конуса прошлого. Прошлым подмножества называется объединение прошлых всех элементов этого подмножества. Максимальным называется элемент, если не существует элемента, для которого он находится в прошлом. Цепью (chain) называется линейно упорядоченное множество элементов. Антицепью (antichain) называется полностью неупорядоченное подмножество множества C, то есть подмножество, любые два элемента которого не связаны отношением частичного упорядочения. Это дискретный аналог пространственноподобной гиперповерхности. Частным родом (partial stem) в C называется конечное подмножество, которое содержит свое прошлое. Полным родом (full stem) в C называется частный род, для которого каждый элемент его дополнения находится в будущем одного из его максимальных элементов.

Аналогично будущим элемента a называется множество $future(a) = \{b \in C|(a \preceq b)\}$. Это дискретный аналог светового конуса будущего. Минимальным называется элемент, если не существует элемента, для которого он находится в будущем.

3.4 Время в квантовой теории

В квантовой теории отсутствует самостоятельная последовательная концепция времени. Это связано с половинчатым характером квантовой теории как теории квантовых объектов в классическом пространстве-времени. Проявлением половинчатости квантовой механики является наличие в теории двух принципиально различных динамик. Один тип динамических процессов описывается детерминистической эволюцией амплитуды. Другой тип динамических процессов описывается стохастическим проектированием амплитуды. Представление о единстве мира неизбежно требует единого динамического закона для всех физических процессов.

В нерелятивистской квантовой механике имеется абсолютная одновременность в обеих динамиках. Эволюция волновой функции в соответствии с уравнением Шредингера происходит в абсолютном времени Ньютона. Последовательность коллапсов волновой функции образует линейно упорядоченную последовательность событий.

Последовательной релятивистской квантовой теории не создано. Существует лоренц-инвариантная квантовая теория поля, но она не является последовательной релятивистской квантовой теорией. В ней нет последовательной концепции времени. Нерелятивистское уравнение Шредингера заменено релятивистским уравнением Дирака. Однако, одновременность относительна, пока не производятся измерения. Измерение, описываемое как проектирование вектора состояния, происходит на пространственноподобной гиперповерхности, то есть вводит абсолютную одновременность. Второй тип динамики, описывающий процесс измерения, остался нерелятивистским. Как возможное объяснение противоречия можно рассмотреть концепцию мультиверса - множественных параллельных вселенных, что подробно разбирается, например, Дойчем [21]. Однако, концепция мультиверса - это интерпретация. То есть она поясняет, а не устраняет имеющуюся в теории непоследовательность концепции времени.

Непоследовательность квантовой теории в вопросе о природе времени проявляется в ее формализме. Во-первых, квантовая механика не может быть сформулирована без классической механики. «...квантовая механика занимает очень своеобразное положение в ряду физических теорий - она содержит классическую механику как свой предельный случай и в то же время нуждается в этом предельном случае для самого своего обоснования» [22], с. 16. Это связано с тем, что квантовая теория - это не теория объектов микромира, а теория взаимодействия объектов микромира и макроскопических объектов - приборов. «Если электрон приходит во взаимодействие с «классическим объектом», то состояние последнего, вообще говоря, меняется. Характер и величина этого изменения зависят от состояния электрона и поэтому могут служить его количественной характеристикой» [22], с. 15.

Отражением описания квантовых объектов в терминах классических приборов является в первую очередь пространство-время. Непрерывное пространство-время есть способ описания свойств макрообъектов. Пространство-время отражает идеализированную ситуацию, когда в каждой точке имеются эталонные часы (линейки являются вторичными объектами и строятся из часов и световых импульсов [23]). Описание микрообъектов в терминах пространства-времени, означает описание микрообъектов относительно множества эталонных часов. Фундаментальная роль эталонных часов и отсчетов времени по ним проявляется в отсутствии оператора времени. «Представим себе галилеева наблюдателя, проводящего измерения. Он пользуется координатами x, y, z, t, наблюдая события в своей макроскопической системе отсчета. Переменные x, y, z, t - это числовые параметры, и именно эти числа входят в волновое уравнение и в волновую функцию. Но каждой частице атомной физики соответствуют «наблюдаемые величины», которые являются координатами частицы. Связь между наблюдаемыми величинами x, y, z и пространственными координатами x, y, z галилеева наблюдателя носит статистический характер; каждой из величин x, y, z в общем случае может соответствовать целый набор значений с некоторым распределением вероятностей. Что же касается времени, то в современной волновой механике нет «наблюдаемой величины» t, связанной с частицей. Есть лишь переменная t, одна из пространственно-временных переменных наблюдателя, определяемая по часам (существенно макроскопическим), которые имеются у этого наблюдателя.

В волновой механике необходимо иметь «переменную эволюции», которая позволяла бы следить за изменением состояния квантовых систем. Но эволюция состояния системы или, точнее, того, что нам известно о нем, с необходимостью протекает в том времени, которое существует в сознании наблюдателя и течение которого мы можем определять лишь по макроскопическим часам. Именно в этом времени, связанном с сознанием наблюдателя, происходят скачкообразные изменения вида функции ψ, вызванные операциями измерения и информацией, которую дают такие операции. Но поскольку мы вынуждены брать в качестве эволюционной переменной макроскопическое время (переменную t релятивистского пространства-времени), мы не можем приписывать частицам или квантовым системам некую «наблюдаемую величину» t вероятностного характера, как мы ставим в соответствие координатам q «наблюдаемые величины» с неким распределением вероятностей значений» [24], глава IX, п. 1, с.142.

Таким образом, квантовая теория есть половинчатая теория описания квантовых объектов в классическом пространстве-времени. Такое описание не может быть максимально возможным. Во Вселенной вблизи сингулярностей существование классических макрообъектов невозможно, и эти ситуации должны описываться только в терминах квантовых объектов. «Теория всего» должна описывать микромир без ссылки на макроприборы. Предлагаемая точка зрения противоположна утверждению, что «...для системы одних только квантовых объектов вообще нельзя было бы построить никакой логически замкнутой механики» [22], с. 15.

Существующая «неполнота» описания квантовых объектов связана с неадекватностью переменных, в которых описывается объект. В этих переменных подмешаны свойства прибора. В первую очередь неадекватно описание квантовых объектов в терминах пространства-времени. Поэтому, неадекватны все переменные, связанные с пространственно-временными переменными. Примеры неадекватных переменных: пространственные переменные, проекции спина на пространственные оси. Примеры адекватных переменных: масса, спин, заряды. Они, вероятно, являются симметриями структуры связей первичных элементов. Ряд адекватных переменных в квантовой теории неизвестен. Таким образом, предлагаемая модель относится к теориям со скрытыми параметрами. Наличие скрытых параметров согласуется с нарушением неравенств Белла только при условии нелокальности. Поскольку дискретная модель является нелокальной, то она допускает нарушение неравенств Белла.

Описание квантовых объектов в терминах классического пространства-времени приводит к тому, что квантовая теория ничего не добавляет к концепции времени. В ней используется макроскопическое время.

3.5 Статус прошлого и будущего

Существует два альтернативных взгляда на прошлое и будущее. Согласно одному взгляду, реально только настоящее. Прошлые события уже не существуют, а будущие еще не существуют. Согласно противоположной точке зрения, все моменты времени, вся Вселенная «существует» от начала до конца времен. Наш язык выражает первый взгляд, для выражения второго нет адекватных терминов. Поэтому термин «существует» взят в кавычки.

В механике Ньютона обе точки зрения равноправны. Абсолютная одновременность позволяет рассматривать как существующее только трехмерное пространство в определенный момент времени. Детерминизм полностью фиксирует все прошлые и будущие состояния Вселенной, что позволяет рассматривать их как «существующие все сразу».

Иная ситуация в теории относительности. Трехмерное пространство - это пространственноподобная гиперповерхность в четырехмерном пространстве-времени. Пространственноподобная - означает, что любая пара точек разделена пространственноподобным интервалом. То есть любая пара точек не взаимодействует, не имеет физической связи в трехмерном пространстве. Эти точки не знают о существовании друг друга.

Трехмерное пространство не существует как физический объект. Это абстрактная математическая конструкция - множество невзаимодействующих точек. Каждая точка испытывает воздействие только точек своего светового конуса прошлого. Пара точек трехмерного пространства связана только через пересечение их световых конусов прошлого, то есть через их общее прошлое.

«Мир событий может быть описан динамически с помощью картины, изменяющейся во времени и набросанной на фоне трехмерного пространства. Но он может быть также описан посредством статической картины, набросанной на фоне четырехмерного пространственно-временного континуума. С точки зрения классической физики обе картины, динамическая и статическая, - равноценны. Но с точки зрения теории относительности статическая картина более удобна и более объективна» [25], с. 489. «Четырехмерный континуум, описываемый «координатами» x_1, x_2, x_3, x_4, Минковский называл «миром», а событие в данной точке - «мировой точкой». Из изучающей «происходящее» в трехмерном пространстве физика становится в известном смысле изучающей «существующее» в четырехмерном «мире» [26], с. 592.

Термин «настоящее» имеет тот же физический смысл, что и термин «одновременное». Для любого события множество одновременных с ним событий и составляет его настоящее. Тем самым точка зрения о существовании только настоящего адекватна только представлениям об абсолютной одновременности. Исключение абсолютной одновременности в теории относительности допускает только возможность равного статуса существования для всех мировых точек. Для любой мировой точки, в которую поместим наблюдателя, все причинно не связанные с ней точки имеют равный статус. Назовем их реально существующими для наблюдателя. Но между собой некоторые из этих точек находятся в отношении прошлое - будущее. Тем самым прошлое и будущее имеет равный статус существования. Альтернативой может быть только утверждение, что никакие точки не существуют для наблюдателя, кроме его мировой точки. То есть ничто не существует.

«Пространство-время иногда называют «вселенной, связанной в единый блок», потому что в нем вся физическая реальность - прошлое, настоящее и будущее - раз и навсегда представлена неизменной в одном четырехмерном блоке. По отношению к пространству-времени ничто не движется. То, что мы называем «моментами», - это определенные слои пространства-времени, и когда содержание этих слоев отличается друг от друга, мы называем это переменой и движением в пространстве» [21], с. 273.

В предлагаемой модели происходит переход от релятивистского континуума мировых точек к дискретным множествам мировых точек. При этом представление о статусе прошлого и будущего не изменяется. Таким образом, предполагается, что будущее уже «существует», оно не «возникает», а «записано». Любые объекты (в том числе, и автор, и читатель) не имеют свободы выбора, а движутся по заданному сценарию подобно персонажам отснятого фильма. То, что мы сейчас живем в некотором кадре фильма, вовсе не означает, что последующие кадры фильма еще не существуют. Модель реализует абсолютный фатализм, когда место каждого кванта задано до скончания времен. Указанная картина плохо воспринимается человеком современной западной цивилизации, в которой одной из стержневых идей мировоззрения является идея свободы выбора. Возможно, модель может быть интерпретирована в терминах возникающего будущего, но автору это не удалось. С другой стороны, возможно, что в абсолютном фатализме нет никакого изъяна, а трудность восприятия является результатом ущербности западного мировоззрения. Все предначертано в книге судеб.

Отметим вторичность категорий прошлое, настоящее и будущее по отношению к категории причинности.

3.6 Корреляции

В концепции пространства-времени причинность свелась к частичному упорядочению событий, которое описывается как хронологический порядок. Такой вырожденный характер причинности связан с детерминизмом. В детерминированном мире мировых линий точечных частиц причинность сводится к линейной упорядоченности событий вдоль мировых линий.

Идея причинности имеет эмпирическую природу. «Уверенность в том, что явления природы с необходимостью следуют закону причинности, в конечном счете основывается лишь на скромных успехах, достигнутых в результате попыток человеческого разума установить взаимосвязь между явлениями природы» [27], с. 103. Исследования микромира показали неадекватность детерминизма. «Согласно современным теориям, основы законов природы не являются причинными, а, напротив, носят существенно статистический характер» [27], с. 107. Таким образом, причинность сводится к статистической связи явлений - корреляции. В случае наступления одних явлений изменяются шансы наступления других явлений. С другой стороны, в случае существования прошлого и будущего понятие причинности также теряет первоначальный смысл. Причины не порождают следствия, а имеется только корреляция событий. Эти корреляции воспринимаются наблюдателем как причинно-следственные связи.

Корреляционный анализ представляет собой развитую теорию [28]. Но для целей настоящей работы важны, в первую очередь, идеи, лежащие в основе представлений о корреляциях. Понятие корреляции основано на двух более первичных составляющих. Это идеи расстояния между событиями и частоты наступления события. События некоторого вида встречаются во Вселенной с некоторой средней частотой. Если на некотором расстоянии от событий другого вида частота появления событий первого вида отлична от среднего, то события первого вида коррелируют с событиями второго вида. Отметим важность учета расстояния. Одной частоты наступления для изучения корреляций недостаточно. Без указания расстояния, то есть при усреднении по всем расстояниям, получается средняя частота наступления по всей Вселенной. Расстояние, как следствие первичных принципов, было указано в параграфе 2.4. Рассмотрим частоту наступления событий.

Отметим, что в терминах корреляций наблюдаемые размеры и возраст Вселенной могут быть максимальным расстоянием, на котором имеются корреляции. В целом же Вселенная может быть бесконечной, то есть состоящей из счетного числа первичных элементов.

3.7 Вероятность

Современная теория вероятностей представляет собой аксиоматическую теорию поля вероятностей как системы множеств, которые удовлетворяют определенным условиям (аксиомам) [29]. Понятия случайного события и его вероятности являются первичными понятиями. Подобный подход неприемлем для целей настоящего исследования, так как не позволяет анализировать источник понятия вероятности.

Поскольку дискретная механика ограничена рассмотрением конечных множеств, то в дискретной механике достаточно теории вероятности конечного числа событий - элементарной теории вероятностей, которая имеет ясные физические основания. В основе понятия вероятности лежит понятие серии однотипных испытаний, в результате которых могут реализовываться различные независимые случайные исходы. Каждый исход в серии испытаний можно характеризовать отношением числа реализаций этого исхода к общему числу испытаний. Если предположить, что при увеличении числа испытаний в серии это отношение для каждого варианта исхода сходится к некоторому пределу, то этот предел для каждого исхода называется его вероятностью. Факт сходимости является определением понятия «независимый случайный исход». Понятия испытания и исхода в дискретной механике будут уточнены в разделе 6.

В квантовой теории используется представление о вероятности, существенно отличное от элементарной теории вероятности. Считается, что за вероятностью стоит более фундаментальная величина - комплексная амплитуда. Первичные принципы, на которых основана комплексная амплитуда, в настоящее время неизвестны, и в квантовой теории сама комплексная амплитуда играет роль первичного принципа. Такое положение трудно признать удовлетворительным, так как амплитуда не является самоочевидной, что отражают многочисленные интерпретации квантовой механики. В настоящей работе предполагается, что описание в терминах амплитуд есть следствие половинчатого характера квантовой теории, что обсуждалось выше.

Предполагается, что на уровне первичных элементов динамика описывается в терминах классических вероятностей в адекватных переменных. Однако, как видно из определения вероятности, приведенного в начале параграфа, классическая вероятность является достаточно сложным понятием, и в ее основе может лежать более простой принцип.

3.8 Бинарная альтернатива

Идея частоты наступления событий с учетом идеи бинарности приводит к идее бинарной альтернативы. «Среди всех принципов, которые можно перечислить в мире науки, трудно вообразить себе что-либо более привлекательное, чем принцип *простоты*. И среди всех видов простоты динамики, жизни и движения ни один не является более совершенным [30], чем *альтернатива* «да - нет» или «истинно - ложно». Это ни коим образом не доказывает правильность такого выбора исходного принципа; можно лишь упомянуть, что «неклассическая двузначность Паули», или «спин», играет доминирующую роль во всей физике частиц» [1], п. 44.5, с. 479. Положим, что на уровне первичных элементов любая вероятность должна сводиться к комбинации бинарных альтернатив «да - нет» с равными вероятностями в 50%. Бинарная альтернатива рассматривается как первичный принцип динамики первичных элементов. Тем самым, динамика предполагается стохастической.

Следует отметить, что в концепции существующего будущего стохастический характер динамики, то есть вероятностный характер будущего, есть следствие недостатка информации у наблюдателя. Все события будущего предопределены, но их нельзя однозначно идентифицировать, обладая информацией только о событиях прошлого.

В семидесятые годы была предпринята попытка построения предгеометрии из бинарных альтернатив. При этом для бинарной альтернативы использовался термин «ur», который является сокращением от «union register» (единичный регистр), то есть Вселенная уподоблялась компьютеру. Это направление обсуждается в работах [31, 32, 33, 34, 35].

В работах [36, 37, 38, 39, 40] рассмотрены варианты дискретной динамики, основанные на обобщениях суммирования по траекториям на случай графа. В работе [40] показано, что механика подобного типа может воспроизводить эффекты интерференции. Однако, в указанных работах закон суммирования по траекториям постулировался. В настоящей работе предполагается, что механика подобного вида может быть выведена из бинарных альтернатив.

Возможно, в будущей «теории всего» будет систематически учитываться информационная составляющая Вселенной. Теория относительности объединила понятия массы и энергии, прежде независимые. От «теории всего» следует ожидать дальнейшего объединения первичных понятий, в частности, полноценного включения информационного описания. Динамика, основанная на бинарных альтернативах, потенциально дает такую возможность. По формуле Шеннона реализация бинарной альтернативы добавляет 1 бит информации. Тем самым в основе динамики лежат процессы в 1 бит. Возможно, полноценное включение информационного описания позволит решить проблему стрелы времени, что должно быть сделано в «теории всего».

Бинарная альтернатива как основа динамики завершает список первичных принципов. Теперь на базе этих принципов должна быть построена модель базового уровня реальности путем объединения первичных принципов в систему.

4 Динамический граф

4.1 Модель ориентированного ациклического графа

В разделе 2 идея дискретности (локальной конечности) привела к модели первичных элементов, связанных первичными связями, образуя граф. В разделе 3 идеи хронологического порядка и дискретности привели к модели причинностного множества. Эти модели допускают естественное объединение. Причинностное множество можно представить в виде ориентированного ациклического графа, то есть графа, все ребра которого имеют ориентацию, и в котором отсутствуют замкнутые ориентированные маршруты.

Обозначим вершины прописными латинскими буквами a, b, c, d … Ребро графа является отношением двух вершин и обозначается $(a\ b)$. Если ребро не ориентированное, то порядок вершин в ребре $(a\ b)$ не учитывается, если ребро ориентированное, то учитывается. Вершины a и b называются инцидентными ребру $(a\ b)$, а ребро $(a\ b)$ - инцидентным вершинам a и b. Если ребро $(a\ b)$ ориентированное, то вершина a называется начальной вершиной, а вершина b конечной вершиной. Ребро по отношению к начальной вершине называется выходящим. Ребро по отношению к конечной вершине называется входящим. Маршрутом в графе называется такая последовательность ребер, что соседние ребра в последовательности инцидентны одной и той же вершине [8]. Ориентированным маршрутом называется последовательность ориентированных ребер такая, что конечная вершина у предыдущего ребра последовательности совпадает с начальной вершиной последующего ребра последовательности. Пример неориентированного маршрута:

$$(a\ b)(c\ b)(c\ d)(a\ d)(a\ e). \tag{5}$$

Пример ориентированного маршрута:

$$(a\ b)(b\ c)(c\ d)(d\ e). \tag{6}$$

Замкнутым (циклическим) называется маршрут, в котором первое и последнее ребро последовательности инцидентны одной и той же вершине.

Возможны различные варианты представления причинностного множества ориентированным ациклическим графом. Обычно элементы причинностного множества идентифицируются с вершинами графа. Отношение частичного упорядочения можно идентифицировать с ориентированными ребрами. В этом случае в силу аксиомы транзитивности (3) каждый первичный элемент (вершина) оказывается непосредственно связан с чрезвычайно большим (возможно бесконечным) числом первичных элементов, составляющих его световые конусы прошлого и будущего. Это свойство не совместимо с идеей локальной конечности связей и связанной с ней идеей расстояния.

Другим вариантом представления причинностного множества является идентификация отношения частичного упорядочения с ориентированными маршрутами. В бесконечном ориентированном ациклическом графе две вершины могут быть соединены бесконечным ориентированным маршрутом или бесконечным числом ориентированных маршрутов, что нарушает аксиому (4). Однако, дискретная механика строится на конечных множествах, а на конечных множествах проблем при таком определении не возникает. В конечном графе любые два элемента или связаны конечным ориентированным маршрутом или нет, что определяется перебором всего конечного множества ориентированных маршрутов. Если они связаны, то начальный и конечный элементы определены однозначно, так как граф ациклический. Ниже будем рассматривать только это представление.

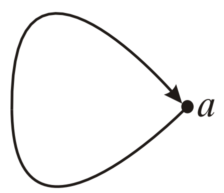

Рис. 1: Петля.

Свойство рефлективности (аксиома (1)) приводит к наличию циклических маршрутов, называемых петлями (рис. 1) и состоящих из одного ребра, то есть ребер, у которых начальная и конечная вершина совпадают. Ребра связаны с другими объектами Вселенной через инцидентные им вершины. Поскольку петли связаны с окружающим миром посредством единственной вершины, то для внешнего наблюдателя петля является внутренним свойством вершины, самодействием вершины. Наличие у вершин внутренней структуры противоречит идее первичных элементов. Для исключения петель из рассмотрения положим, что ориентированные маршруты соответствуют отношению строгого частичного упорядочения, обозначаемого $\prec$. При этом аксиомы (1) и (2) заменяются на аксиомы:

$$\{a : a \prec a\} = \emptyset \qquad \text{(арефлективность)}, \tag{7}$$

$$\forall a \{b : (a \prec b) \wedge (b \prec a)\} = \emptyset \qquad \text{(ацикличность)}. \tag{8}$$

Аксиомы транзитивности (3) и локальной конечности (4) остаются без изменений. Ниже будет рассматриваться только отношение строгого частичного упорядочения, которое для краткости будет называться отношением частичного упорядочения.

В рассматриваемом представлении ориентированный ациклический граф является более богатой структурой, чем причинностное множество. В качестве примера рассмотрим три различных ориентированных ациклических графа, изображенных на рисунке 2. Они идентифицируются с одним и тем же причинностным множеством, элементы которого a, b, c, d связаны отношениями $a \prec b \prec c \prec d$. В общем случае отношение частичного упорядочения между двумя вершинами не позволяет определить наличие ориентированного ребра между этими вершинами. Если отношения частичного упорядочения нет, то нет и ребра. Если множество

Александрова не содержит элементов, то ребро есть. Но если множество Александрова не пусто, то о наличии ребра ничего сказать нельзя. Можно только утверждать, что каждый ориентированный маршрут между этими вершинами содержит число вершин, не превосходящее число элементов в множестве Александрова. Таким образом, топология ориентированного ациклического графа задает отношение частичного упорядочения вершин, обратное же неверно.

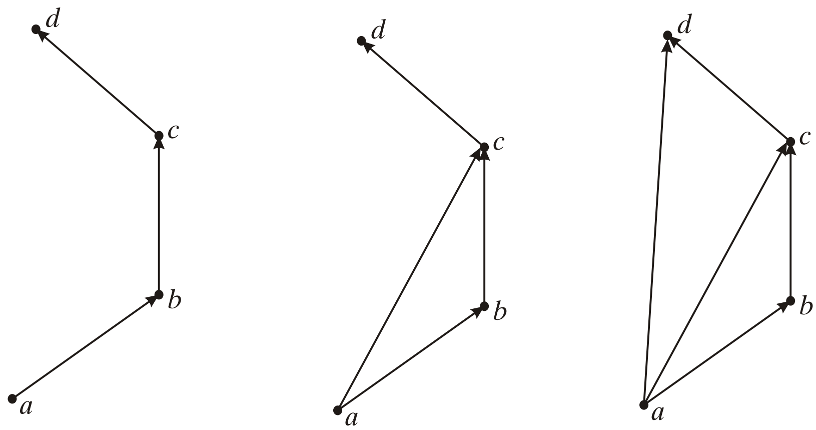

Рис. 2: Примеры ориентированных ациклических графов.

Топология графа может рассматриваться, как отражение первичного свойства, называемого непосредственное следование [41], и идентифицируемого с ориентированным ребром. На конечном множестве M первичных элементов a, b, c, $\ldots$, называемых вершины, задано отношение непосредственного следования, называемое ориентированными ребрами, и обозначаемое $(a\ b)$. Выполняются следующие аксиомы:

$$|M| < \infty \qquad \text{(конечность)}, \tag{9}$$

$$\{a : (a\ a)\} = \emptyset \qquad \text{(арефлективность)}, \tag{10}$$

$$\{a : (a\ a_1)(a_2\ a_3)(a_3\ a_4)\ldots(a_i\ a)\} = \emptyset \qquad \text{(ацикличность)}. \tag{11}$$

Отношение частичного упорядочения получается как производное от отношения непосредственного следования, если положить, что

$$\exists(a_1, a_2, a_3, a_4 \ldots a_i) : (a\ a_1)(a_1\ a_2)(a_2\ a_3)(a_3, a_4)\ldots(a_i\ b) \Rightarrow a \prec b. \tag{12}$$

Транзитивность (3) следует из свойства объединения ориентированных маршрутов. Объединение маршрута из a в b и из b в c образует маршрут из a в c. Это свойство непосредственно следует из определения ориентированного маршрута.

Рассмотрим физическую интерпретацию модели ориентированного ациклического графа. В реляционной концепции пространства-времени реальной мировой точкой является элементарное событие - акт взаимодействия частиц. Это определение точки [42]. Дискретным аналогом мировой точки в рассматриваемой модели является вершина. Вершина - это первичное взаимодействие, а не частица. Термин «первичный» выбран вместо «элементарный», так как термин «элементарный» уже занят в физике элементарных частиц, а идентификация этих частиц с первичными элементами не очевидна. Первичная частица - это элементарная длительность. Вершины - это взаимодействия первичных частиц. Таким образом, первичные частицы идентифицируются с ребрами.

Материальные объекты представляют собой структуры, образуемые вершинами и ребрами ориентированного графа. Ближайшей целью дискретной механики является построение элементарных частиц из первоэлементов. При этом частицы должны представлять собой регулярные структуры на подобие «рисунков на обоях». Симметрии этих «рисунков на обоях» являются симметриями элементарных частиц и являются основой для идентификации определенных структур с частицами определенных видов. Для этого симметрии структур графа следует описать на языке теории групп, аналогично симметриям в кристаллографии.

Ниже термин структура в узком смысле будет использоваться для обозначения определенных топологий графа. Термин граф будет использоваться для обозначения конкретного экземпляра графа. Для поиска структур требуется закон их построения, то есть динамика графа, которая обсуждается в разделе 6. Но прежде чем перейти к построению динамики надо уточнить модель.

4.2 Модель динамического графа

Выше рассматривались конечные ориентированные ациклические графы общего вида. Не накладывалось ограничений на число ребер, инцидентных одной и той же вершине. Поскольку именно ребра идентифицируются с первичными частицами, то их взаимодействие должно удовлетворять принципу бинарности - первичные взаимодействия являются парными. Представление о вершине, как о взаимодействии пары ребер приводит к x-структуре [41]. X-структура (рис. 3) - это вершина и ицидентные ей ребра: два ребра, направленные к вершине (называемые входящими), и два ребра, направленные от вершины (называемые выходящими). Положим, что все вершины и инцидентные им ребра во Вселенной образуют х-структуры. Это является более сильным условием, чем локальная конечность связей. Ориентированный ациклический граф, все вершины и ребра которого образуют х-структуры, назовем х-графом. Помимо бинарности х-структура выражает первичный закон сохранения: число первичных частиц при взаимодействии не изменяется.

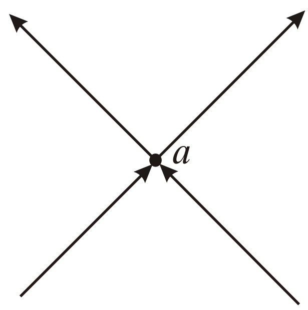

Рис. 3: X-структура.

Х-граф может содержать двукратные ребра. Число ребер имеющих одну и ту же начальную и одну и ту же конечную вершины называется кратностью ребра. Ребро кратности больше одного называется кратным. Две х-структуры могут образовывать двукратные ребра (рис. 4).

Идея х-структуры противоречит модели конечного ориентированного графа. Поскольку любая вершина и инцидентные ей ребра образуют х-структуру, то любая вершина имеет инцидентное выходящее ребро. По определению графа ребро является отношением двух вершин. Следовательно, для любой вершины существует вершина, непосредственно следующая за ней. В силу ацикличности получаем бесконечную последовательность неповторяющихся вершин. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Лемма 1 *Ориентированный ациклический х-граф бесконечен.*

Также справедлива следующая лемма о невозможности разбиения связного х-графа.

Лемма 2 *Подграф G_1 бесконечного связного х-графа G или совпадает с G, или содержит пустое множество вершин, или не является х-графом.*

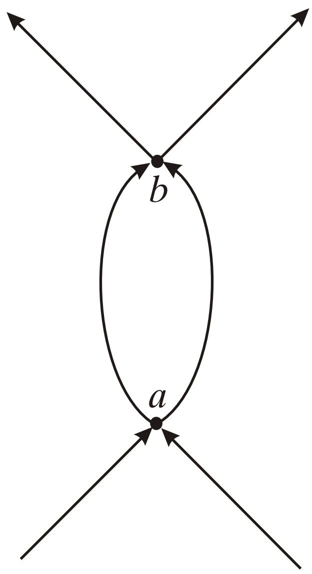

Рис. 4: Двукратное ребро.

Доказательство. Первые два случая очевидны. Рассмотрим третий случай. Пусть подграф G_1 не совпадает с G и содержит не пустое множество вершин. Пусть вершина a принадлежит G_1, а вершина b принадлежит G, но не принадлежит G_1. Рассмотрим маршрут (возможно не ориентированный) из вершины a в вершину b. Он существует в силу связности G. На этом маршруте найдутся две соседние вершины c и d такие, что c принадлежит G_1, а d не принадлежит G_1. Следовательно, ребро $(c\ d)$ не принадлежит G_1. Так как ребра, инцидентные вершине c, образуют х-структуру в G, то ребра, инцидентные вершине c в G_1, не образуют х-структуру, и G_1 не является х-графом. ■

Таким образом, х-граф может описывать только сразу всю бесконечную Вселенную. Чтобы иметь возможность рассматривать отдельные явления, описываемые конечными подграфами графа Вселенной, нужно модифицировать определение графа.

В теории графов хорошо известен дуализм вершин и ребер. Можно рассмотреть ребра как элементы исходного множества, а вершины - как отношение на множестве ребер [40]. При этом допустимы ребра, инцидентные только одной вершине. Другой конец ребра остается «свободным». При таком переопределении можно построить конечные структуры, состоящие из х-структур. Свободный конец ребра становится инцидентным вершине при включении графа в состав большего графа. У всех ребер отсутствуют свободные концы только в бесконечном графе Вселенной.

Еще одним преимуществом подобного задания графа является эквивалентность задания на множестве ребер отношения частичного упорядочения и отношения непосредственного следования. Будем обозначать ребра жирными латинскими прописными буквами. Назовем ребро $\boldsymbol{b}$ непосредственно следующим за ребром $\boldsymbol{a}$, если начало ребра $\boldsymbol{b}$ инцидентно той же вершине a, что и конец ребра $\boldsymbol{a}$. Назовем ребра $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, связанными отношением частичного упорядочения $\boldsymbol{a} \prec \boldsymbol{b}$, если существует ориентированный маршрут из вершины, ицидентной концу ребра $\boldsymbol{a}$, в вершину, инцидентную началу ребра $\boldsymbol{b}$. Отношение частичного упорядочения следует из непосредственного следования аналогично обычному определению графа. В отличие от вершин, для ребер из отношения частичного упорядочения следует отношение непосредственного следования.

Теорема 1 *Ребро $\boldsymbol{b}$ непосредственно следует за ребром $\boldsymbol{a}$ тогда и только тогда, когда ребра $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ связаны отношением частичного упорядочения и множество Александрова $A(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ не содержит элементов.*

Доказательство. Достаточность условия аналогична случаю вершин. Необходимость отсутствия элементов в множестве Александрова следует из того, что в противном случае существует ориентированный циклический маршрут из вершины, которой инцидентны ребра $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, что противоречит ацикличности графа. ■

Когда в качестве первичных элементов рассматриваются вершины, то х-граф содержит принцип бинарности дважды. Один раз - это парная связь вершин, называемая ребрами. Второй раз - это наличие у каждой вершины только двух входящих и двух выходящих ребер. Когда в качестве первичных элементов рассматриваются ребра, то х-граф содержит принцип бинарности только один раз. Ребра взаимодействуют попарно, порождая пару новых ребер.

Таким образом, ребра в качестве первичных элементов, являются более предпочтительными, чем вершины. Однако, ниже будет рассмотрен несколько иной подход, в котором и ребра и вершины рассматриваются, как составные объекты, состоящие из более первичных элементов. Этими элементами являются начало ребра и конец ребра. Выбор в качестве первичных элементов «половинок» ребер вместо ребер приводит к новому полезному свойству. Множество, все элементы которого образуют х-структуры, можно разделить на непересекающиеся подмножества так, что все элементы каждого подмножества также образуют х-структуры. При выборе ребер в качестве первичных элементов разделение структуры на подмножества, состоящие из х-структур, возможно только, если подмножества пересекаются, то есть некоторые ребра включены в два подмножества. Очевидно, что множество «половинок» ребер воспроизводит свойства множества ребер. Для этого надо объединить «половинки» ребер в пары, называемые ребра, и рассмотреть свойства полученных пар.

Обозначим начало ребра буквой α с номером α_i, а конец ребра - буквой β с номером β_i. Латинские прописные индексы являются целыми положительными числами. Первичный элемент без указания на его сорт будем обозначать буквой γ с номером γ_i. Ребро является упорядоченной парой $(\alpha_i\ \beta_j)$, связанной отношением непосредственного следования. Вершина является упорядоченной парой двух неупорядоченных пар $([\beta_j\ \beta_l][\alpha_i\ \alpha_k])$, где каждый элемент второй пары непосредственно следует каждому элементу первой пары. Таким образом, вершина является х-структурой. Пару элементов одного сорта, входящих в одну вершину, назовем смежными элементами. В вершине $([\beta_j\ \beta_l][\alpha_i\ \alpha_k])$ смежными являются $[\alpha_i\ \alpha_k]$ и $[\beta_j\ \beta_l]$.

Назовем полученную структуру динамическим графом. Термин «динамический» связан с тем, что наиболее важной стороной модели является динамика. По определению будем считать, что все первичные элементы объединены в х-структуры, но не все первичные элементы образуют ребра. Модель Вселенной, как бесконечного х-графа, совпадает с моделью Вселенной, как бесконечного динамического графа. Но динамический граф позволяет рассматривать конечные динамические подграфы, состоящие из х-структур. Такой динамический подграф содержит вершины, все первичные элементы которых входят в состав ребер. Назовем такие вершины внутренними вершинами, а первичные элементы, внутренними началами ребер и концами ребер соответственно. Он также содержит вершины, некоторые элементы которых не входят в состав ребер. Назовем такие вершины внешними вершинами, а первичные элементы, не входящие в состав ребер, внешними или выходящими началами ребер и внешними или входящими концами ребер соответственно. Эти внешние первичные элементы образуют ребра в полном динамическом графе Вселенной. При выделении динамического подграфа внешние первичные элементы представляют собой места разрыва, «половинки разрезанных ребер». Таким образом динамический подграф содержит как информацию о своей структуре, так и информацию о способе его включения в динамический граф Вселенной.

Элемент «начало ребра» интерпретируется как начальное состояние или рождение ребра. Соответственно элемент «конец ребра» интерпретируется как конечное состояние или уничтожение ребра. Внутренней структуры у ребра нет, нет промежуточного между началом и концом взаимодействия, поэтому ребро состоит только из начала и конца. Вершина интерпретируется как взаимодействие двух ребер, в котором два ребра уничтожаются и рождаются два новых ребра. Это элементарный процесс дискретной механики.

Имеется явная аналогия динамического графа с результатами бинарной геометрофизики, развиваемой группой Ю. С. Владимирова [43]. Рассматриваются два множества элементов, которые интерпретируются, как множества начальных и конечных состояний. Рассматривается связь элементов одного множества с элементами другого множества. Хронологическая последовательность получается последовательным чередованием элементов одного и другого множества. Построим граф отношений непосредственного следования для x-структуры $([\beta_j\ \beta_l][\alpha_i\ \alpha_k])$ (рис. 5). Образующие x-структуру первичные элементы являются вершинами этого графа, а ребрами являются отношения непосредственного следования. Этот граф совпадает с графом бинарной структуры ранга (2, 2).

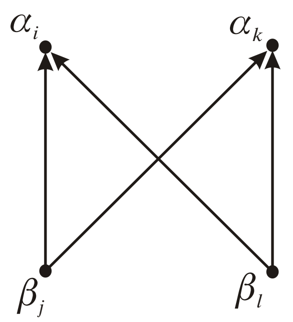

Рис. 5: Граф отношений непосредственного следования x-структуры.

Модель динамического графа рассматривается как стоящая за современной квантовой физикой. При этом должен существовать переход от динамического графа к квантовой теории поля. Возможно, первичные элементы начала и концы ребер являются прообразами операторов рождения и уничтожения частиц (ребер) [40].

4.3 Философское обоснование модели

На первый взгляд предлагаемая модель может выглядеть несколько искусственно, допускать те, или иные модификации, и, следовательно, она не является единственно возможной, безальтернативной моделью. В этом параграфе приведено философское обоснование модели, показывающее ее уникальность. Разумеется, философское обоснование не является доказательством. По всей видимости, можно подвести философское обоснование практически под любую разумную модель. Однако, рассмотрение философского обоснования имеет смысл. Оно обладает самостоятельной мировоззренческой ценностью и содержит эвристический потенциал для дальнейших исследований. При этом на практике успешная модель является обоснованием для связанных с ней философских взглядов, а не наоборот.

Объекты материального мира обладают различными свойствами. Для всех объектов одно свойство является общим, свойство, которым объект обязательно обладает. Это свойство быть существующим, существовать. На языке современной физики исходный объект, единственное свойство которого существовать, это точка пространства-времени. Ее можно назвать квантом существования. Все другие свойства, приписываемые точкам, являются не свойствами самих точек, а свойствами отношений между точками. Множественность существования порождает пространство-время. Фундаментальным свойством отношения между точками является отношение частичной упорядоченности. Линейно упорядоченное подмножество точек образует мировую линию, на которой можно ввести собственное время. Неупорядоченное подмножество точек образует пространсвенноподобную гиперповерхность.

С категорией «существование» связаны категории «возникновение» и «исчезновение». Любой объект возникает, существует и исчезает. В пределе бесконечного существования возникновение и (или) исчезновение удалены в бесконечность. Точка-событие обладает нулевой длительностью. Она возникает и в этот же момент исчезает, то есть фактически не существует. В точке-событии существование, возникновение и исчезновение слиты. Идея разделения возникновения и исчезновения приводит к первоэлементам двух сортов: первоэлемент возникновения и первоэлемент исчезновения. Пара первоэлемент возникновения и первоэлемент исчезновения образуют квант существования конечной длительности. Конечный квант существования связывает разделенные момент возникновения и момент исчезновения. Помимо свойства «существование» конечный квант существования с необходимостью обладает ориентацией от момента-возникновения к моменту-исчезновению.

Предполагается, что в мире ничто не возникает из ничего, и ничто не исчезает в никуда. На фундаментальном уровне это означает, что всякий момент-возникновение одного кванта существования есть и момент-исчезновение другого кванта существования и наоборот, всякое момент-исчезновение кванта существования есть и момент-возникновение другого кванта существования. Кванты событий заключаются в исчезновении одних и возникновении других квантов существования. Число квантов существования в каждом кванте события сохраняется. Это первичный закон сохранения.

Предполагается, что в мире невозможно самодействие. Квант существования не может самопроизвольно исчезнуть, породив другой квант существования. Квант существования исчезает только в результате взаимодействия с другим квантом существования, который также исчезает (иначе он имел бы внутреннюю структуру). Таким образом, квант события заключается во взаимодействии и исчезновении двух квантов существования, порождающем два новых кванта существования.

4.4 Аксиомы динамического графа

Опишем динамический граф на строгом аксиоматическом языке. Динамический граф это множество M элементов γ_i, которые делятся на два сорта, обозначаемые α_i и β_i, которые удовлетворяют набору аксиом. Аксиома конечности:

$$|M| < \infty. \tag{13}$$

Таким образом, индекс, нумерующий элемент, может быть выбран целым числом. Иногда для простоты обозначений индекс у элемента будет опускаться.

На множестве M задана бинарная операция непосредственного следования, обозначаемая круглыми скобками $(\alpha_i\ \beta_j)$, свойства которой образуют группу аксиом структуры. Если в операции $(\alpha_i\ \beta_j)$ первым является элемент сорта α_i, то $(\alpha_i\ \beta_j)$ называется ориентированное ребро. Аксиомы ребра:

$$\begin{aligned}
&\forall \alpha_i (\exists! \beta_j : (\alpha_i\ \beta_j)) \vee (\nexists \beta_j : (\alpha_i\ \beta_j)),\\
&\forall \alpha_i (\nexists \alpha_j : (\alpha_i\ \alpha_j)),\\
&\forall \beta_j (\exists! \alpha_i : (\alpha_i\ \beta_j)) \vee (\nexists \alpha_i : (\alpha_i\ \beta_j)),\\
&\forall \beta_j (\nexists \beta_i : (\beta_i\ \beta_j)).
\end{aligned} \tag{14}$$

Они означают, что каждому элементу сорта α_i может непосредственно следовать только не более одного элемента сорта β_j, а каждому элементу сорта β_j может непосредственно предшествовать только не более одного элемента сорта α_i. Элементы сорта α_i называются началами ребер, а элементы сорта β_j - концами ребер. Аксиомы х-структуры:

$$\begin{array}{l} \forall\alpha_i\exists!\alpha_j : (\forall\beta_k : (\beta_k\ \alpha_i) \Rightarrow (\beta_k\ \alpha_j)), \\ \forall\beta_i\exists!\beta_j : (\forall\alpha_k : (\beta_i\ \alpha_k) \Rightarrow (\beta_j\ \alpha_k)). \end{array} \tag{15}$$

Они означают, что любому элементу сорта β_k непосредственно следуют два и только два элемента сорта α_i, которые называются смежными и обозначаются $[\alpha_i\ \alpha_j]$. Любому элементу сорта α_k непосредственно предшествуют два и только два элемента сорта β_j, которые называются смежными и обозначаются $[\beta_i\ \beta_j]$. Как уже было определено выше, вершиной или х-структурой является упорядоченная пара двух пар смежных элементов $([\beta_j\ \beta_l]\ [\alpha_i\ \alpha_k])$, где каждый элемент второй пары непосредственно следует каждому элементу первой пары. Последней является аксиома ацикличности:

$$\{\gamma_i|(\gamma_i\ \gamma_k)(\gamma_k\ \gamma_l)\ldots(\gamma_j\ \gamma_i)\} = \emptyset. \tag{16}$$

5 Дискретная кинематика

5.1 Свойства динамического графа

Под кинематикой будут пониматься свойства динамических графов, как общие, так и различные частные случаи, без указания законов формирования этих динамических графов. Формулирование и изучение соответствующих законов составляет предмет динамики. Рассмотрим общие свойства динамического графа, следующие из сформулированных выше аксиом.

Аксиомы динамического графа не изменяются относительно преобразования инверсии непосредственного следования: смены направления отношения непосредственного следования и одновременного преобразования элементов сорта α в элементы сорта β и наоборот. Следовательно, имеется следующая симметрия.

Лемма 3 *Свойства динамического графа не изменяются при инверсии непосредственного следования.*

Лемма 4 *Из отношения непосредственного следования элементов γ_i следует отношение частичного упорядочения.*

Доказательство. Определим два элемента γ_i и γ_m, как связанные отношением частичного упорядочения $\gamma_i \prec \gamma_m$, если существует последовательность элементов вида $(\gamma_i\gamma_k)(\gamma_k\gamma_l)\ldots(\gamma_j\gamma_m)$. Ацикличность непосредственно следует из аксиомы (16). Транзитивность непосредственно следует из определения последовательности элементов. ■

Справедливо и обратное. Задание отношения частичного упорядочения элементов γ_i позволяет определить отношение непосредственного следования. Это возможно благодаря следующей лемме.

Лемма 5 *Если два элемента связаны отношением непосредственного следования, то их множество Александрова не содержит элементов.*

Доказательство. Элементы связаны отношением непосредственного следования, или если они образуют ребро, или если они образуют х-структуру. Случай ребра очевиден, так как предшествующий и последующий элементы единственные по отношению к друг другу. Рассмотрим случай х-структуры. Покажем, что множество Александрова двух произвольных элементов β_j и α_i, входящих в одну х-структуру, не содержит элементов. Пусть их смежными элементами являются элементы β_l и α_k. В х-структуре, образованной двумя парами смежных элементов $[\beta_j\ \beta_l]$ и $[\alpha_i\ \alpha_k]$, согласно аксиомам (15) элементы связаны отношением непосредственного следования следующим образом: $(\beta_j\ \alpha_i)$, $(\beta_l\ \alpha_i)$, $(\beta_j\ \alpha_k)$ и $(\beta_l\ \alpha_k)$. Эти отношения можно изобразить в виде графа, где элементы изображены вершинами, а отношения непосредственного следования - ребрами (рис. 6). Элемент γ_m принадлежит множеству Александрова элементов β_j и α_i, если выполняются соотношения $\beta_j \prec \gamma_m$, $\gamma_m \prec \alpha_i$. Тогда в силу аксиом х-структуры (15) $\gamma_m \prec \beta_l$, $\alpha_k \prec \gamma_m$, что на рисунке 6 изображено пунктирной линией. Но эти соотношения вместе с соотношением $(\beta_l\ \alpha_k)$ приводят к образованию замкнутого ориентированного маршрута, что противоречит аксиоме ацикличности (16). Следовательно, рассмотренный элемент γ_m не существует. ■

Доказанная лемма позволяет определить два элемента, как связанные отношением непосредственного следования, если они связаны отношением частичной упорядоченности и их множество Александрова не содержит элементов. Таким образом, как отношение непосредственного следования, так и отношение частичного упорядочения могут рассматриваться как исходные, а другое отношение, соответственно, как следствие.

Будем использовать следующую терминологию, аналогичную принятой в разделе 3.3. Для пары элементов $\gamma_k \prec \gamma_m$ будем говорить, что γ_m следует γ_k, а γ_k предшествует γ_m; γ_k находится в прошлом γ_m, а γ_m находится в будущем γ_k. Множество всех элементов, предшествующих γ_m, образует световой конус прошлого γ_m и обозначается $LP(\gamma_m)$. Множество всех элементов, следующих γ_k, образует световой конус будущего γ_k и обозначается $LF(\gamma_k)$.

Из аксиом х-структуры (15) следует, что все элементы динамического графа объединены в х-структуры. Тем самым, справедливы следующие леммы.

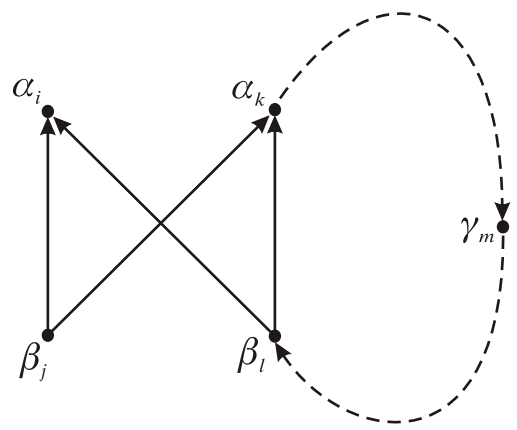

Рис. 6: Граф отношений частичного упорядочения x-структуры.

Лемма 6 *Минимальный непустой динамический граф содержит одну x-структуру.*

Лемма 7 *В динамическом графе число начал ребер четно и равно числу концов ребер.*

В силу аксиом ребра (14) не все элементы образуют ребра. В разделе 4.2 они были названы внешними элементами. Поскольку число начал ребер, входящих в состав ребер, равно числу концов ребер, входящих в состав ребер, то из леммы 7 следует следующая лемма.

Лемма 8 *В динамическом графе число внешних начал ребер равно числу внешних концов ребер.*

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 9 (Лемма разбиения) *Из любого непустого динамического графа можно исключить любую x-структуру. При этом оставшаяся структура будет динамическим графом (возможно несвязным, или пустым).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную x-структуру, принадлежащую рассматриваемому динамическому графу. Исключим эту x-структуру из рассматриваемого динамического графа и проверим справедливость аксиом динамического графа. Поскольку мы уменьшаем число элементов на четыре, то остается справедливой аксиома конечности (13).

Некоторые из элементов исключаемой х-структуры могут входить в состав ребер. После ее исключения другие элементы, составлявшие эти ребра, уже не будут входить в состав ребер, что допускается аксиомами ребра (14). Согласно аксиомам х-структуры (15), каждый элемент входит только в одну х-структуру. Тем самым, исключенные элементы не входят в состав оставшихся х-структур, и для этих структур будут справедливы аксиомы (15). Исключение элементов не может привести к образованию новых маршрутов, в том числе и замкнутых ориентированных, то есть остается справедлива аксиома ацикличности (16). Тем самым, для структуры, оставшейся после исключения х-структуры, остаются справедливы все аксиомы динамического графа. ■

Из леммы разбиения и обратимости операций исключения-включения х-структур следует теорема объединения.

Теорема 2 (Теорема объединения) *Произвольный динамический граф может быть получен путем последовательного добавления к х-структуре других х-структур одна за другой. Структура, получаемая на каждом шаге, является динамическим графом. Последовательность, в которой производится объединение, может быть произвольной.*

Полученный результат назван теоремой в силу его важности для построения динамики, рассматриваемой в следующем разделе.

Поскольку все элементы сгруппированы в х-структуры, называемые вершины, то упорядоченную пару элементов, называемую ребром, можно рассматривать как отношение пары вершин, в которые входят образующие ребро элементы. Таким образом, если ограничиться рассмотрением вершин и ребер, то динамический граф можно рассматривать, как обычный ориентированный ациклический граф и к нему можно применять результаты теории графов. Этот результат можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 3 *Любой динамический граф является ориентированным ациклическим графом, вершинами которого являются х-структуры.*

Элементы динамического графа образуют линейно упорядоченные подмножества, называемые ориентированные маршруты или цепи, то есть подмножества, все элементы которых попарно связаны отношением непосредственного следования. Ориентированный маршрут называется полным, если динамический граф не содержит элемента, который не принадлежит маршруту и может быть добавлен к маршруту без нарушения линейной упорядоченности.

Элемент называется максимальным, если динамический граф не содержит элемента, который следует за рассматриваемым. Элемент называется минимальным, если динамический граф не содержит элемента, который предшествует рассматриваемому. Эта терминология аналогична приведенной в разделе 3.3 для причинностных множеств.

Лемма 10 *Динамический граф содержит хотя бы одну x-структуру, в которой оба выходящих элемента сорта α являются максимальными.*

Доказательство. Доказательством леммы является алгоритм нахождения x-структуры, в которой оба выходящих элемента сорта α являются максимальными. Выберем в динамическом графе произвольную x-структуру. Рассмотрим ее элементы сорта α. Если они оба являются максимальными, то искомая x-структура найдена. В противном случае выберем в этой x-структуре не максимальный элемент сорта α. Рассмотрим x-структуру, у которой входящий элемент непосредственно следует за выбранным элементом сорта α. Для этой x-структуры повторим рассмотрение. В силу конечности и ацикличности динамического графа за конечное число шагов будет найдена x-структура, в которой оба выходящих элемента сорта α являются максимальными. ■

Из лемм 3 и 10 следует лемма 11.

Лемма 11 *Динамический граф содержит хотя бы одну x-структуру, в которой оба входящих элемента сорта β являются минимальными.*

5.2 Полная антицепь

В разделе 3.3 было дано определение антицепи в причинностном множестве. В случае динамического графа его можно сформулировать аналогичным образом. Антицепью называется полностью неупорядоченное подмножество элементов динамического графа, то есть подмножество, любые два элемента которого не связаны отношением частичного упорядочения. Антицепь является дискретным аналогом пространственноподобной гиперповерхности. Шириной антицепи назовем число элементов в антицепи. Полной антицепью динамического графа назовем такую антицепь, что в рассматриваемом динамическом графе не существует элемента, который не находится в отношении частичного упорядочения с каким-либо элементом рассматриваемой антицепи. В англоязычной литературе полная антицепь также называется нерасширяемая антицепь (inextendible antichain) [44]. Ниже антицепи и любые другие множества элементов, в том числе и динамические графы, будем обозначать прописными латинскими буквами.

Лемма 12 *Полная антицепь разделяет все остальные элементы динамического графа на два подмножества. Элементы одного подмножества предшествуют хотя бы одному элементу полной антицепи, то есть образуют ее прошлое. Элементы другого подмножества следуют некоторым элементам полной антицепи, то есть образуют ее будущее.*

Доказательство. Не существует элемент γ, который следует некоторому элементу γ_1 антицепи ($\gamma_1 \prec \gamma$) и предшествует некоторому элементу γ_2 антицепи ($\gamma \prec \gamma_2$), так как в этом случае элементы γ_1 и γ_2 связаны отношением частичного упорядочения ($\gamma_1 \prec \gamma \prec \gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 \prec \gamma_2$), то есть не могут принадлежать одной антицепи. Антицепь полная, поэтому любой элемент, не связанный отношением частичного упорядочения с каким-либо элементом антицепи, принадлежит антицепи. ■

Это свойство справедливо и для ориентированного ациклического графа. При этом в ориентированном ациклическом графе возможна связь прошлого и будущего полной антицепи, минуя эту антицепь. На рисунке 7 изображен пример такой связи. Полная антицепь состоит из вершин b_1, b_2, b_3, b_4, ее прошлое состоит из вершин a_1, a_2, a_3, а ее будущее состоит из вершин c_1, c_2, c_3. Ребро (a_2 c_2) осуществляет связь прошлого и будущего полной антицепи так, что ни один элемент полной антицепи не включен в эту связь. В динамическом графе полная антицепь изолирует свое будущее от своего прошлого, то есть справедлива следующая теорема.

Теорема 4 *Любая полная антицепь A в динамическом графе обладает следующим свойством. Для любого элемента γ_1, принадлежащего прошлому A, и любого элемента γ_2, принадлежащего будущему A, любой маршрут из γ_1 в γ_2 содержит элемент γ, принадлежащий A. Если маршрут ориентированный, то он содержит единственный элемент, принадлежащий A.*

Доказательство. Предположим, что существует маршрут S из γ_1 в γ_2, не содержащий элементов A. Тогда каждый элемент S принадлежит либо прошлому A, либо будущему A. Пусть элементы γ_3 в γ_4 - соседние элементы маршрута S, причем γ_3 принадлежит прошлому A, а γ_4 - будущему A. Следовательно, существуют элементы γ_5 и γ_6, принадлежащие A, для которых $\gamma_3 \prec \gamma_5$ и $\gamma_6 \prec \gamma_4$. Поскольку элементы γ_5 и γ_6 соседние, то возможны 6 вариантов.

Вариант 1. Элемент γ_3 есть элемент сорта α_i, элемент γ_4 есть сорта β_j и (α_i β_j) - ребро. Следовательно, $\gamma_3 \prec \gamma_4$, и из $\gamma_3 \prec \gamma_5$ следует $\gamma_4 \prec \gamma_5$. В

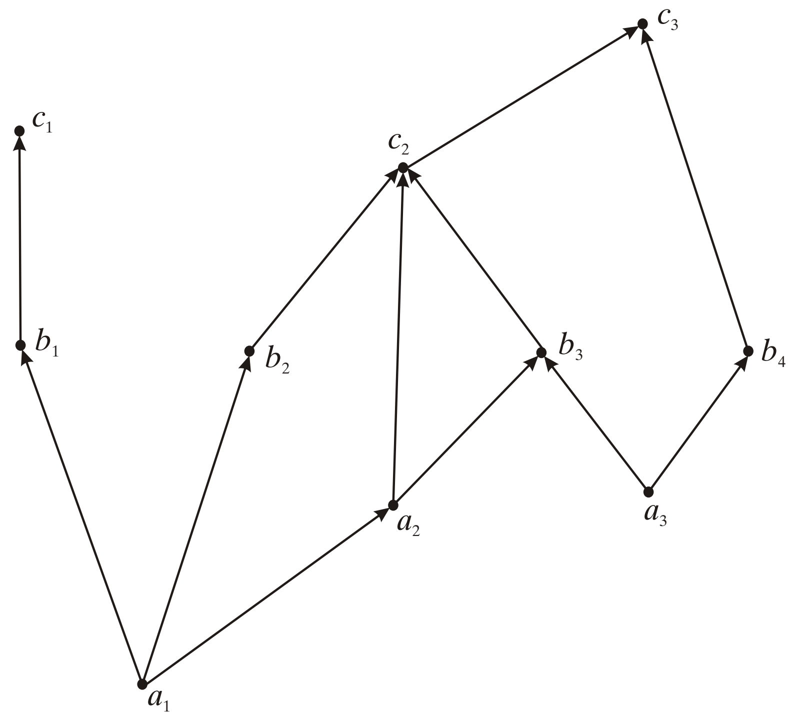

Рис. 7: Полная антицепь графа.

силу транзитивности частичного упорядочения $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Вариант 2. Элемент γ_3 есть элемент сорта β_j, элемент γ_4 есть сорта α_i и $(\alpha_i\ \beta_j)$ - ребро. Следовательно, $\gamma_4 \prec \gamma_3$. Тогда $\gamma_6 \prec \gamma_4 \prec \gamma_3 \prec \gamma_5$, и в силу транзитивности частичного упорядочения $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Вариант 3. Элемент γ_3 есть элемент сорта α_i, элемент γ_4 есть сорта β_j и элементы γ_3 и γ_4 входят в одну x-структуру. Следовательно, $\gamma_4 \prec \gamma_3$. Тогда $\gamma_6 \prec \gamma_4 \prec \gamma_3 \prec \gamma_5$, и в силу транзитивности частичного упорядочения $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Вариант 4. Элемент γ_3 есть элемент сорта β_j, элемент γ_4 есть сорта α_i и элементы γ_3 и γ_4 входят в одну x-структуру. Следовательно, $\gamma_3 \prec \gamma_4$. Смежные к ним элементы обозначим α_1 и β_1. Они связаны отношениями $\gamma_3 \prec \alpha_1$, $\beta_1 \prec \alpha_1$, и $\beta_1 \prec \gamma_4$. Из $\gamma_6 \prec \gamma_4$ следует $\gamma_6 \prec \gamma_3 \prec \gamma_4$ или $\gamma_6 \prec \beta_1 \prec \gamma_4$. Так как γ_4 и α_1 - смежные элементы, то из этих отношений следует $\gamma_6 \prec \gamma_3 \prec \alpha_1$ или $\gamma_6 \prec \beta_1 \prec \alpha_1$. Из $\gamma_3 \prec \gamma_5$ следует $\gamma_3 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$ или $\gamma_3 \prec \alpha_1 \prec \gamma_5$. Так как γ_3 и β_1 - смежные элементы, то из этих отношений следует $\beta_1 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$ или $\beta_1 \prec \alpha_1 \prec \gamma_5$. Объединяя рассмотренные отношения получаем следующие варианты: $\gamma_6 \prec \gamma_3 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$, $\gamma_6 \prec \gamma_3 \prec \alpha_1 \prec \gamma_5$, $\gamma_6 \prec \beta_1 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$ и $\gamma_6 \prec \beta_1 \prec \alpha_1 \prec \gamma_5$. Из каждого варианта в силу транзитивности частичного упорядочения следует $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Вариант 5. Элементы γ_3 и γ_4 есть элементы сорта α. Так как они соседние элементы маршрута, то они являются смежными элементами в x-структуре. В этом случае из $\gamma_6 \prec \gamma_4$ следует $\gamma_6 \prec \gamma_3$. Тогда $\gamma_6 \prec \gamma_3 \prec \gamma_5$, и в силу транзитивности частичного упорядочения $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Вариант 6. Элементы γ_3 и γ_4 есть элементы сорта β. Так как они соседние элементы маршрута, то они являются смежными элементами в x-структуре. В этом случае из $\gamma_3 \prec \gamma_5$ следует $\gamma_4 \prec \gamma_5$. Тогда $\gamma_6 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$, и в силу транзитивности частичного упорядочения $\gamma_6 \prec \gamma_5$, что невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат антицепи A.

Полученное во всех вариантах противоречие доказывает, что любой маршрут из γ_1 в γ_2 содержит элемент γ, принадлежащий A. Если маршрут ориентированный, то он содержит единственный элемент, принадлежащий A. В противном случае два элемента A окажутся связанными отношением частичного упорядочения. ■

Доказанная теорема показывает, что в модели динамического графа любая полная антицепь содержит мгновенный срез всех процессов, протекающих из ее прошлого в ее будущее.

Отметим, что в динамическом графе две полных непересекающихся антицепи, то есть не имеющие общих элементов, не обязательно лежат одна в будущем по отношению к другой. На рисунке 8 приведен пример двух непересекающихся антицепей A_1 и A_2. Изображенный динамический граф содержит по 18 элементов сорта α и β. Элементы, составляющие A_1, изображены сплошными линиями. Это 10 элементов: α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, α_8, α_9, α_{10}, β_{11} и β_{14}. Элементы, составляющие A_2, изображены точечными линиями. Это 10 элементов: α_1, α_{11}, α_{12}, α_{13}, α_{14}, β_5, β_6, β_7, β_9 и β_{10}. Остальные элементы изображены пунктирными линиями. Часть элементов A_1 лежит в прошлом некоторых элементов A_2, а часть элементов A_1 лежит в будущем некоторых элементов A_2. Назовем полную антицепь A_1 динамического графа G следующей за полной антицепью A_2, если существует хотя бы один элемент, принадлежащий A_1, который следует какому-то элементу, принадлежащему A_2, но не существует элементов, принадлежащих A_1, которые предшествуют каким-либо элементам, принадлежащим A_2. Из общего множества полных антицепей динамического графа можно выделить подмножества линейно упорядоченных полных антицепей согласно следующей лемме.

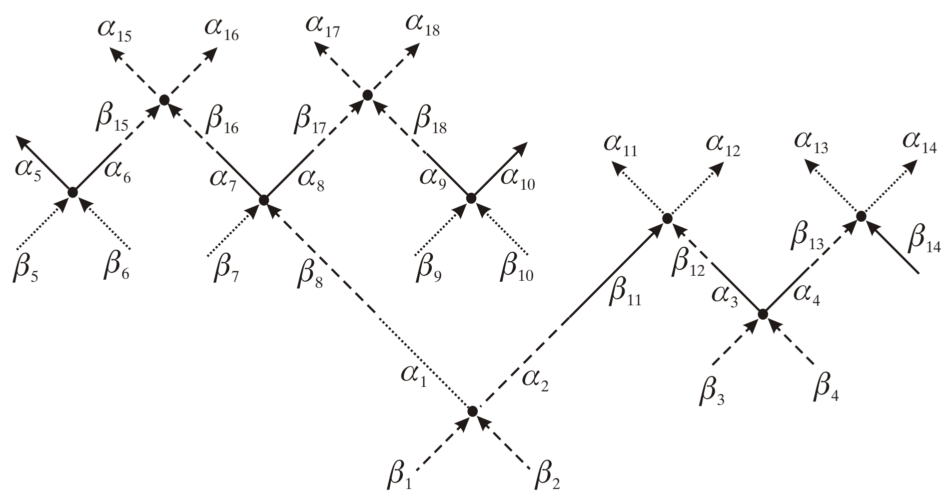

Рис. 8: Две непересекающиеся полные антицепи.

Лемма 13 *Пусть A_1 полная антицепь динамического графа G. Если существует элемент γ, который следует некоторым элементам, принадлежащим A_1, то существует полная антицепь A_2, которая следует за A_1, и которой принадлежит γ.*

Доказательство. Построим искомую антицепь A_2 по следующему алгоритму. Рассмотрим множество элементов, предшествующих элементу γ. Это световой конус прошлого $LP(\gamma)$ элемента γ. Рассмотрим пересечение элементов множеств A_1 и $LP(\gamma)$. Остальные элементы A_1 не связаны отношением частичного упорядочения с γ и образуют с ним антицепь A_{02}. Рассмотрим множество элементов B, которые следуют элементам множества A_1 и предшествуют элементу γ. Число таких элементов конечно, в силу конечности G (достаточно только локальной конечности G, что будет использовано в разделе 5.5). Рассмотрим все х-структуры, содержащие элементы множества B. Обозначим полученное множество элементов B_1. Если элемент γ есть элемент сорта β, то элемент γ и остальные элементы содержащей его x-структуры не включены в B_1. Если элемент γ есть элемент сорта α, то x-структура, содержащая γ, принадлежит B_1. Смежный γ элемент сорта α не следует и не предшествует никакому элементу A_{02} и может быть добавлен к этой антицепи. В любой x-структуре из множества B_1 или оба элемента сорта α предшествуют γ, или один предшествует γ, а другой нет. Этот элемент не следует и не предшествует никакому элементу A_{02} и может быть добавлен к этой антицепи. Добавим все такие элементы сорта α к A_{02}. Построенная антицепь удовлетворяет условиям леммы. Покажем, что она полная и тем самым является искомой A_2. Для этого надо показать, что любой элемент G, который не принадлежит A_{02}, или предшествует, или следует какому-то элементу A_{02}. Отношение элементов A_1 и A_{02} рассмотрено выше. Остальные элементы G или предшествуют, или следуют какому-то элементу A_1, так как A_1 полная антицепь. Элемент, который предшествует какому-то элементу A_1, предшествует какому-то элементу A_1, принадлежащему A_{02}, и/или предшествует γ, то есть предшествует элементу A_{02}. Элемент, который следует какому-то элементу A_1, или принадлежит B_1, или не принадлежит B_1. Если он принадлежит B_1, то он или предшествует γ, или является элементом сорта α, принадлежащим A_{02}. Остальные элементы или следуют какому-то элементу A_1, принадлежащему A_{02}, или нет. В первом случае они следуют элементам A_{02}. Во втором случае такой элемент γ_1 следует некоторому элементу γ_2, принадлежащему пересечению множеств A_1 и $LP(\gamma)$, и γ_1 не принадлежит B_1. Следовательно, существует ориентированный маршрут из γ_2 в γ_1. Если γ есть элемент сорта α и ему непосредственно предшествует элемент γ_2 сорта β, то γ_1 следует или γ, или смежному ему элементу сорта α. Оба эти элемента принадлежат A_{02}. В других случаях γ_2 не принадлежит x-структуре, которой принадлежит γ. Если γ_2 есть элемент сорта α, тогда ему непосредственно следует единственный элемент сорта β, принадлежащий B_1. Если γ_2 есть элемент сорта β и не предшествует непосредственно γ, то он принадлежит B_1. Следовательно, ориентированный маршрут, включающий γ_2 и γ_1, содержит элементы, принадлежащие B_1, и не принадлежащие B_1, так как γ_2 не принадлежит B_1. Тем самым, этому маршруту принадлежат соседние последовательные элементы, первый из которых принадлежит B_1, а второй не принадлежит B_1. По построению множества B_1 первый элемент является элементом сорта α, а второй является элементом сорта β. По построению множества A_{02} этот элемент сорта α принадлежит A_{02}. Следовательно, γ_1 следует элементу, принадлежащему A_{02}. Таким образом антицепь A_{02} является искомой полной антицепью A_2. ■

Полная антицепь может быть физически интерпретирована как множество одновременных элементов. Доказанная лемма означает, что для каждого элемента в будущем полной антицепи A_1 можно указать множество одновременных с ним элементов, которые хронологически не предшествуют A_1. Следующая лемма показывает отношение между полными антицепями в динамическом графе и его динамическом подграфе.

Лемма 14 *Пусть в динамическом графе G задана полная антицепь A. Тогда в динамическом подграфе G_0, динамического графа G, множество A_0 элементов A, принадлежащих G_0, множество B_1 входящих элементов G_0, которые в G следуют каким-либо элементам A, и множество B_2 выходящих элементов G_0, которые в G предшествуют каким-либо элементам A, образуют полную антицепь A_1 в G_0.*

Доказательство. Докажем, что A_1 является антицепью в G_0. Элемент γ_1 из B_1 не имеет предшествующих элементов в G_0. По условию в G существует элемент γ_2, принадлежащий A, для которого $\gamma_2 \prec \gamma_1$. Если существует элемент γ_3, принадлежащий A_0, для которого $\gamma_1 \prec \gamma_3$, то в G имеем $\gamma_2 \prec \gamma_1 \prec \gamma_3$. Это невозможно, так как γ_2 и γ_3 принадлежат A. Следовательно, элементы B_1 не связаны отношением частичного упорядочения с элементами A_0. Элемент γ_4 из B_2 не имеет следующих элементов в G_0. По условию в G существует элемент γ_5, принадлежащий A, для которого $\gamma_4 \prec \gamma_5$. Если существует элемент γ_6, принадлежащий A_0, для которого $\gamma_6 \prec \gamma_4$, то в G имеем $\gamma_6 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$. Это невозможно, так как γ_5 и γ_6 принадлежат A. Следовательно, элементы B_2 не связаны отношением частичного упорядочения с элементами A_0. Предположим, что элементы γ_1 и γ_4 в G_0 связаны отношением частичного упорядочения $\gamma_1 \prec \gamma_4$. Тогда $\gamma_2 \prec \gamma_1 \prec \gamma_4 \prec \gamma_5$. Это невозможно, так как γ_2 и γ_5 принадлежат A. Таким образом, A_1 является антицепью.

Докажем от противного, что A_1 полная антицепь. Пусть в G_0 существует элемент γ_7, который не связан отношением частичного упорядочения с элементами множеств A_0, B_1 и B_2 и не принадлежит им. Следовательно, γ_7 не принадлежит A. В G_0 элемент γ_7 не предшествует никакому элементу A_0, то есть не существует ориентированного маршрута от γ_7 к какому-либо элементу A_0. Предположим, что в G существует ориентированный маршрут от γ_7 к какому-либо элементу A (возможно, что к элементу A_0). Поскольку этот маршрут не существует в G_0, то часть элементов маршрута принадлежит G_0, а часть не принадлежит. Будем последовательно перебирать элементы этого маршрута, следующие друг другу, начиная с γ_7, пока не дойдем до первого на маршруте элемента, который принадлежит G_0. Этот элемент маршрута является входящим элементом G_0, то есть является элементом B_1. Таким образом, в G_0 построен ориентированный маршрут из γ_7 к элементу множества B_1. Но по предположению такого маршрута нет. Следовательно, в G не существует ориентированного маршрута из γ_7 к элементу множества A. Из рассмотренного построения и леммы 3 следует, что в G не существует ориентированного маршрута из элемента множества A к γ_7. Следовательно, γ_7 не связан в G отношением частичного упорядочения с элементами A. Это противоречит условию, что антицепь A полная в G. Таким образом, в G_0 не существует элемент, который не связан отношением частичного упорядочения с элементами A_1, то есть антицепь A_1 полная в G_0. ■

Все внутренние элементы динамического графа объединены в пары, называемые ребра. Если один из элементов входит в антицепь, то его можно заменить в антицепи на другой элемент, входящий в состав того же ребра. При этом положение антицепи в структуре динамического графа не изменится. Например, полная анитицепь останется полной; элементы, лежащие в будущем антицепи, останутся в будущем. Назовем антицепи эквивалентными, если они различаются только внутренними элементами, входящими в состав одних и тех же ребер. Таким образом, множество всех антицепей динамического графа можно разбить на непересекающиеся подмножества эквивалентных антицепей.

5.3 Ширина динамического графа

Следующая теорема лежит в основе классификации структур динамического графа.

Теорема 5 (Теорема о ширине динамического графа) *Все полные антицепи динамического графа содержат одинаковое число элементов, называемое шириной динамического графа.*

Доказательство. Докажем теорему по индукции. Для динамического графа, состоящего из одной x-структуры ($[\beta_j\ \beta_l]\ [\alpha_i\ \alpha_k]$) справедливость теоремы очевидна. Имеются две полные антицепи $\beta_j\ \beta_l$ и $\alpha_i\ \alpha_k$ по два элемента в каждой. Предположим, что теорема справедлива для динамического графа, состоящего из N x-структур (то есть $4N$ элементов). Докажем, что тогда она справедлива для динамического графа, состоящего из $N+1$ x-структур (то есть $4N+4$ элементов).

Согласно теореме 2 любой динамический граф может быть получен последовательным добавлением к x-структуре других x-структур одна за другой. Тем самым, для доказательства теоремы надо показать что она не нарушается при произвольном добавлении одной х-структуры к произвольному динамическому графу. Для этого рассмотрим все возможные варианты добавления х-структуры.

Вариант 1. На рисунке 9 изображен первый вариант добавления х-структуры. Рассмотрим полученные полные антицепи. Возможны два случая: элемент α_1 принадлежит полной антицепи (вариант 1.1) и элемент α_1 не принадлежит полной антицепи (вариант 1.2). В варианте 1.1 после добавления х-структуры ($[\beta_1\ \beta_2][\alpha_2\ \alpha_3]$) из исходной полной антицепи получаются три полные антицепи. Одна содержит все элементы исходной полной антицепи и элемент β_2. Другая содержит все элементы исходной полной антицепи кроме элемента α_1 и элементы β_1 и β_2. Третья содержит все элементы исходной полной антицепи кроме элемента α_1 и элементы α_2 и α_3. В варианте 1.2 из того, что элемент α_1 не является элементом полной антицепи следует, что полная антицепь содержит элемент γ_1 такой, что $\gamma_1 \prec \alpha_1$, так как элемент α_1 - максимальный. После добавления х-структуры получаем, что $\gamma_1 \prec \beta_1$, $\gamma_1 \prec \alpha_2$ и $\gamma_1 \prec \alpha_3$. Следовательно, эти элементы не могут быть добавлены к исходной антицепи. Элемент β_2 находится в отношении упорядочения только с элементами α_2 и α_3, которые не входят в рассматриваемую антицепь. Следовательно, элемент β_2 включается в рассматриваемую полную антицепь. Во всех случаях после добавления х-структуры число элементов полной антицепи увеличивается на один. Следовательно, если полные антицепи содержали равное число элементов до добавления х-структуры, то они будут содержать равное число элементов и после добавления х-структуры.

Вариант 2. На рисунке 10 изображен второй вариант добавления х-структуры. Возможны три случая: элементы α_1 и α_2 принадлежат полной антицепи (вариант 2.1), элемент α_1 принадлежит полной антицепи, а элемент α_2 не принадлежит (вариант 2.2), и оба элемента α_1 и α_2 не принадлежат полной антицепи (вариант 2.3). В варианте 2.1 после добавления х-структуры ($[\beta_1\beta_2][\alpha_3\alpha_4]$) из исходной антицепи получаем пять антицепей. Первая антицепь совпадает с исходной. Вторая антицепь получается из исходной заменой элемента α_1 на β_1. Третья антицепь получается из исходной заменой элемента α_2 на β_2. Четвертая антицепь получается из исходной заменой элементов α_1 и α_2 на элементы β_1 и β_2. Пятая антицепь получается из исходной заменой элементов α_1 и α_2 на элементы α_3 и α_4. В варианте 2.2 из исходной антицепи получаем две антицепи. Первая антицепь совпадает с исходной. Вторая антицепь получается из исходной заменой элемента α_1 на элемент β_1. Элемент α_2 не входит в исходную антицепь, то есть существует элемент γ_2, принадлежащий антицепи, для которого $\gamma_2 \prec \alpha_2$. Элементы β_2, α_3 и α_4 не могут входить в состав рассматриваемых антицепей, так как для них имеем

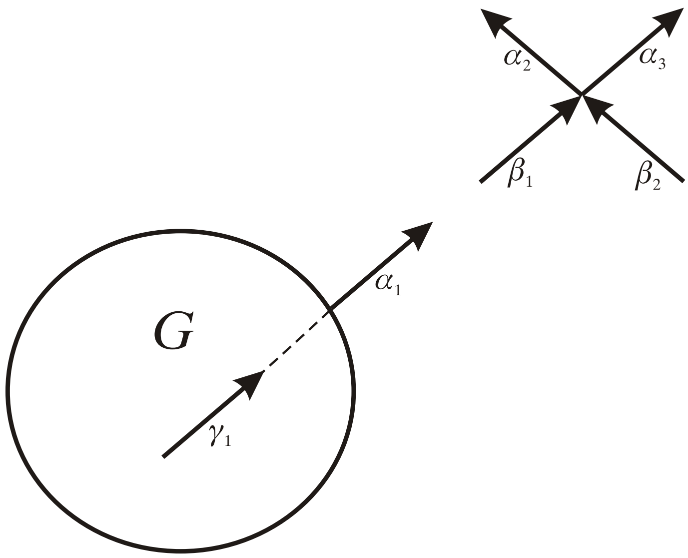

Рис. 9: Первый вариант добавления х-структуры.

$\alpha_2 \prec \beta_2$, $\beta_2 \prec \alpha_3$ и $\beta_2 \prec \alpha_4$, и в силу транзитивности $\gamma_2 \prec \beta_2$, $\gamma_2 \prec \alpha_3$ и $\gamma_2 \prec \alpha_4$. Чтобы включить эти элементы в состав антицепи, следует из исходной антицепи исключить элементы вида γ_2. Тем самым в состав исходной полной антицепи войдет элемент α_2 и мы получаем уже рассмотренный вариант 2.1. В варианте 2.3 из исходной антицепи получаем одну антицепь, которая совпадает с исходной. Элементы α_1 и α_2 не принадлежат исходной антицепи, то есть существуют элементы γ_1 и γ_2, принадлежащие антицепи, для которых $\gamma_1 \prec \alpha_1$ и $\gamma_2 \prec \alpha_2$. Элементы β_1, β_2, α_3 и α_4 не могут входить в состав рассматриваемых антицепей, так как для них имеем $\alpha_1 \prec \beta_1$, $\alpha_2 \prec \beta_2$, $\beta_1 \prec \alpha_3$ и $\beta_2 \prec \alpha_4$, и в силу транзитивности $\gamma_1 \prec \beta_1$, $\gamma_2 \prec \beta_2$, $\gamma_1 \prec \alpha_3$ и $\gamma_2 \prec \alpha_4$. Во всех случаях после добавления х-структуры число элементов полной антицепи не изменяется. Следовательно, если полные антицепи содержали равное число элементов до добавления х-структуры, то они будут содержать равное число элементов и после добавления х-структуры.

В других вариантах у добавленной х-структуры хотя бы один элемент сорта α не является максимальным в динамическом графе. Сведем эти варианты к уже рассмотренным. В полученном динамическом графе, содержащем $4N + 4$ элементов, найдем х-структуру, у которой оба выходящих элемента сорта α являются максимальными, что можно в силу леммы 10. Удалим эту х-структуру. В результате в силу леммы 9

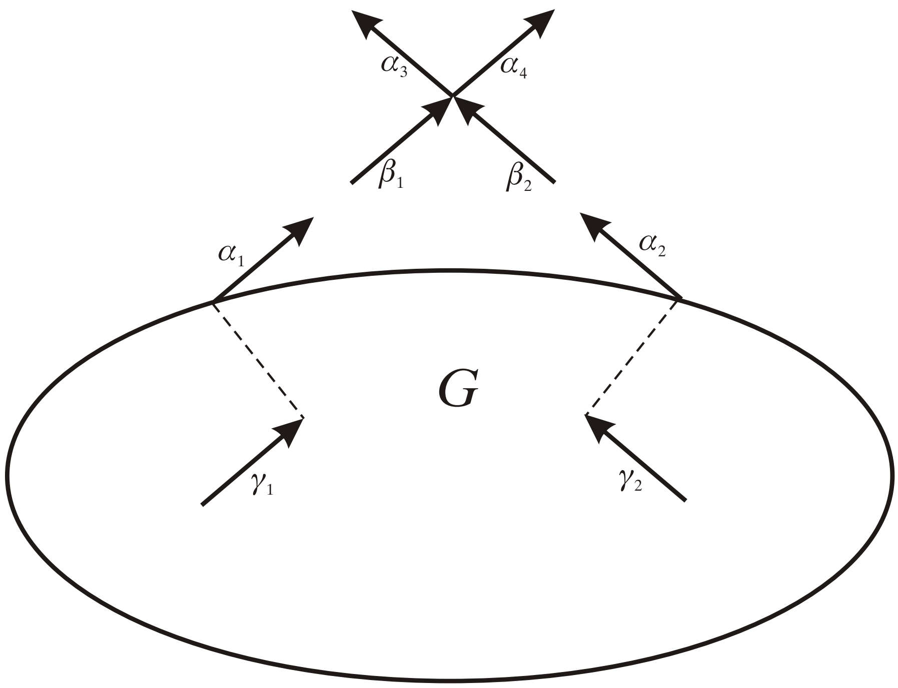

Рис. 10: Второй вариант добавления х-структуры.

получим динамический граф, содержащий $4N$ элементов. По предположению для него теорема справедлива. Добавим удаленную х-структуру. При этом мы получим один из уже рассмотренных вариантов добавления 1 или 2. Для них теорема справедлива. ■

Возможно, указанную теорему можно обобщить на случай, когда вершины представляют собой не х-структуры, а каждая включает произвольное число элементов сорта α и равное ему число элементов сорта β.

Если рассматриваемую модель интерпретировать в терминах частиц, то доказанная теорема имеет очевидный физический смысл. Интерпретируем ребра, как мировые линии некоторых фундаментальных частиц между взаимодействиями. Вершины интерпретируем, как элементарные парные взаимодействия. В этой интерпретации доказанная теорема означает, что если в каждом элементарном акте взаимодействия число частиц не изменяется, то и в любом сложном процессе, включающем много частиц и элементарных актов взаимодействия, полное число частиц не меняется.

Аналогично число элементов в ориентированном маршруте можно назвать его глубиной. В отличие от ширины полных антицепей полные ориентированные маршруты динамического графа могут иметь различную глубину. Под глубиной динамического графа можно понимать максимальную глубину его полных ориентированных маршрутов.

Очевидно, что множество внешних входящих элементов динамического графа образуют полную антицепь, так как они не связаны отношением частичного упорядочения, и любой другой элемент динамического графа находится в будущем по отношению к некоторым внешним входящим элементам. Аналогично внешние выходящие элементы образуют полную антицепь. Следствием теоремы 5 является следующая лемма.

Лемма 15 *Число внешних входящих элементов и число внешних выходящих элементов равно ширине динамического графа.*

На основании доказанной теоремы структура любого динамического графа характеризуется его шириной. Этот факт может быть положен в основу классификации структур. Все множество структур динамических графов можно разделить на подмножества структур равной ширины.

5.4 Световой конус

По аналогии с терминологией, принятой при описании пространства-времени, для любого элемента динамического графа множество элементов, находящихся с ним в отношении частичного упорядочения и предшествующих ему, назовем световым конусом прошлого рассматриваемого элемента. Аналогично, множество элементов, следующих ему, назовем световым конусом будущего рассматриваемого элемента. Число элементов в множестве, являющемся пересечением светового конуса с полной антицепью, назовем шириной светового конуса. Для ширины светового конуса справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 (Теорема о ширине светового конуса) *Пусть непустые множества A_1 и A_2 элементов динамического графа G являются пересечениями светового конуса будущего $LF(\gamma)$ произвольного элемента γ динамического графа G соответственно с полными антицепями A_{01} и A_{02}. Если не существует элементов A_2, которые предшествуют элементам A_1, то ширина A_2 не меньше ширины A_1. Аналогично, для непустых пересечений A_3 и A_4 соответственно антицепей A_{03} и A_{04} со световым конусом прошлого $LP(\gamma)$ произвольного элемента γ динамического графа G справедливо, что если не существует элементов*

A_4, которые следуют элементам A_3, то ширина A_4 не меньше ширины A_3.

Доказательство. Докажем теорему для светового конуса будущего. Тогда ее справедливость для светового конуса прошлого следует из леммы 3. Рассмотрим динамический подграф G_1 динамического графа G. Он состоит из всех х-структур, включающих хотя бы один элемент, следующий γ. Таким образом, G_1 включает в себя весь $LF(\gamma)$. Рассмотрим произвольную х-структуру $([\beta_1\beta_2][\alpha_1\alpha_2])$ динамического графа G, не включающую элемент γ. Если $\gamma \not\prec \alpha_1$, то $\gamma \not\prec \beta_1$, $\gamma \not\prec \beta_2$ и $\gamma \not\prec \alpha_2$. Тем самым, если хотя бы один элемент сорта α в х-структуре не принадлежит $LF(\gamma)$, то эта х-структура не принадлежит G_1. Если $\gamma \not\prec \beta_1$ и $\gamma \not\prec \beta_2$, то $\gamma \not\prec \alpha_1$ и $\gamma \not\prec \alpha_2$. Тем самым, если оба элемента сорта β в х-структуре не принадлежат $LF(\gamma)$, то эта х-структура не принадлежит G_1. Если $\gamma \prec \beta_1$, то $\gamma \prec \alpha_1$ и $\gamma \prec \alpha_2$. При этом возможны два варианта: $\gamma \prec \beta_2$, или $\gamma \not\prec \beta_2$. Рассмотрим х-структуру, которой принадлежит элемент γ. Если γ есть элемент сорта α, то остальные элементы х-структуры не следуют элементу γ, и эта х-структура не принадлежит G_1. Если γ есть элемент сорта β, то ему следуют оба элемента сорта α рассматриваемой х-структуры, и эта х-структура принадлежит G_1. Смежный элементу γ элемент сорта β не принадлежит $LF(\gamma)$.

Если элемент сорта β принадлежит $LF(\gamma)$, то существует элемент сорта α, который или принадлежит $LF(\gamma)$, или является элементом γ, и с которым рассматриваемый элемент сорта β образует ребро. В первом случае рассматриваемый элемент сорта β является внутренним элементом G_1. Во втором случае рассматриваемый элемент сорта β является внешним входящим элементом G_1. Если элемент сорта β принадлежит G_1, но не принадлежит $LF(\gamma)$, то он или является внешним входящим элементом в G, или существует элемент сорта α, который не принадлежит $LF(\gamma)$, и который образует ребро с рассматриваемым элементом сорта β. В обоих случаях рассматриваемый элемент сорта β является внешним входящим элементом в G_1. Приведенный анализ показывает, что динамический граф G_1 состоит из внутренних и внешних выходящих элементов, которые составляют $LF(\gamma)$ в G и внешних входящих элементов, которые не принадлежат $LF(\gamma)$ в G. Если элемент γ является элементом сорта β, то он является внешним входящим элементом в G_1. В противном случае он не принадлежит G_1, а элемент сорта β, образующий с ним ребро, является единственным внешним входящим элементом в G_1, который принадлежит $LF(\gamma)$.

Докажем от противного, что не существует элемент A_{02}, предшествующий A_1. Пусть существует такой элемент γ_0. Тогда в G существует ориентированный маршрут S_0 из γ_0 к некоторому элементу A_1. Поскольку по условию γ_0 не принадлежит A_2, то часть элементов S_0 не принадлежит $LF(\gamma)$. Следовательно, последовательно перебирая элементы S_0 от γ_0 мы на некотором шаге придем к элементу β_3, принадлежащему S_0, который является входящим в G_1. Элемент β_3 не является γ, так как иначе все элементы $LF(\gamma)$ следуют γ_0 и A_1 - пустое множество, что противоречит условию теоремы. По построению $\gamma_0 \prec \beta_3$. Следовательно, не существует элементов A_{02}, следующих β_3. Также не существует элементов A_{02}, следующих β_4, смежному к элементу β_3. По построению β_4 принадлежит $LF(\gamma)$ и предшествует A_1. Следовательно, β_4 не принадлежит A_{02}. Таким образом, β_4 следует некоторому элементу γ_1, принадлежащему A_{02}. γ_1 не принадлежит A_2, так как он предшествует A_1. Тогда в G существует ориентированный маршрут S_1 из γ_1 в β_4, причем часть S_1 не принадлежит $LF(\gamma)$. Последовательно перебирая элементы S_1 от γ_1 мы на некотором шаге придем к элементу β_5, принадлежащему S_1, который является входящим в G_1. Аналогично β_3, β_5 не является γ, $\gamma_1 \prec \beta_5$, и не существует элементов A_{02}, следующих β_5. Также не существует элементов A_{02}, следующих β_6, смежному к элементу β_5. По построению β_6 принадлежит $LF(\gamma)$. Повторяя рассуждения, получаем бесконечную линейно упорядоченную последовательность элементов $\gamma \prec \cdots \prec \beta_6 \prec \beta_4$. Но множество Александрова любой пары элементов содержит конечное число элементов. Полученное противоречие доказывает, что не существует элемента A_{02}, предшествующего A_1.

Поскольку A_{02} полная антицепь, то каждому элементу, принадлежащему A_1, следует элемент, принадлежащий A_{02}, или элемент принадлежит и A_1 и A_{02}. Как следующие A_1, так и принадлежащие A_1, элементы A_{02} принадлежат $LF(\gamma)$, следовательно, они принадлежат A_2. Таким образом, каждому элементу, принадлежащему A_1, следуют элементы, принадлежащие A_2, или элемент принадлежит и A_1 и A_2.

Рассмотрим полную антицепь A_{11} в G_1, которая включает множество A_1, и полную антицепь A_{12} в G_1, которая включает множество A_2. A_{11} и A_1 или совпадают, или A_{11} состоит из A_1 и некоторых внешних входящих элементов согласно лемме 14. Аналогично, A_{12} и A_2 или совпадают, или A_{12} состоит из A_2 и некоторых внешних входящих элементов. Таким образом, существует множество B_{01} (возможно пустое) внешних входящих элементов в G_1, которые предшествуют каким-либо элементам, принадлежащим A_1, и существует множество B_1 (возможно пустое) внешних входящих элементов в G_1, которые не предшествуют каким-либо элементам, принадлежащим A_1. Имеем $A_{11} = A_1 \cup B_1$. Аналогично существует множество B_{02} (возможно пустое) внешних входящих элементов в G_1, которые предшествуют каким-либо элементам, принадлежащим A_2, и существует множество B_2 (возможно пустое) внешних входящих элементов в G_1, которые не предшествуют каким-либо элементам, принадлежащим A_2. Имеем $A_{12} = A_2 \cup B_2$. Поскольку внешнему входящему элементу не предшествуют никакие элементы динамического графа, то для каждого внешнего входящего элемента любая полная антицепь должна или включать этот элемент, или включать элементы, которые ему следуют. Следовательно, $B_{01} \cup B_1 = B = B_{02} \cup B_2$, где B множество всех внешних входящих элементов динамического графа G_1. Поскольку каждый элемент, принадлежащий A_1, или предшествует элементу, принадлежащему A_2, или совпадает с ним, то все элементы множества B_{01} предшествуют каким-то элементам множества A_2. Следовательно, $B_{01} \subseteq B_{02}$, и $B_2 \subseteq B_1$. Число элементов множества B_2 не больше числа элементов множества B_1. Ширины A_{11} и A_{12} равны по теореме 5. Следовательно, Число элементов множества A_2 не меньше числа элементов множества A_1. ■

Отметим, что на рассмотренное отношение между сечениями светового конуса полными антицепями не влияют отношения между элементами этих антицепей, не принадлежащими сечениям светового конуса.

Доказанная теорема имеет ясный физический смысл. Она означает, что в рассматриваемой модели световой конус первичного элемента не может сужаться по мере удаления во времени от этого первичного элемента. При этом под шириной светового конуса понимается число одновременно существующих первичных элементов, которые принадлежат этому световому конусу.

5.5 Симметрии структур

Структуры могут обладать симметриями. Для изучения симметрий перенумеруем все элементы целыми числами. Нумерацию элементов сортов α и β можно проводить независимо. Единственное требование: в структуре не должно быть двух элементов одного сорта с одинаковыми номерами. В остальном нумерация может быть произвольной. Нумерация элементов играет роль аналогичную системе координат в гладком многообразии. Аналогично системам координат можно рассматривать специальные системы нумерации элементов, которые отражают свойства структуры. Ниже при анализе конкретных примеров будут использоваться такие системы.

В теории групп перестановкой называется запись элементов множества в определенном порядке, а подстановкой называется изменение порядка, в котором расположены элементы [45]. Для элементов динамического графа нумерация является перестановкой, а подстановкой является такая смена нумерации, что в новой нумерации элементов каждого сорта используются все те и только те номера элементов этого же сорта, что и в первоначальной нумерации. Элементом прообразом будем называть элемент с первоначальным номером. Элементом образом будем называть элемент с номером, полученным в результате подстановки, равным первоначальному номеру элемента прообраза. Элементом образом порядка n назовем элемент, который получает номер элемента прообраза при n-кратном повторении подстановки.

Преобразованием симметрии типа подстановки будем называть подстановку, сохраняющую сорт элементов и отношения непосредственного следования, то есть подстановку, при которой каждый элемент образ находится в тех же отношениях непосредственного следования с другими элементами образами, что и его элемент прообраз с элементами прообразами указанных других элементов образов. Поскольку отношение непосредственного следования полностью определяет структуру, преобразование симметрии переводит структуру в тождественную ей структуру. В силу леммы 5 в определении симметрии можно отношение непосредственного следования заменить на отношение частичного упорядочения.

В кристаллографии для математического описания симметрий кристаллических решеток рассматриваются бесконечные идеальные кристаллические решетки [46]. Аналогичным образом введем понятие бесконечного динамического графа. Бесконечный динамический граф - это счетное множество элементов двух сортов, удовлетворяющее аксиомам (14 - 16), но вместо аксиомы конечности (13) удовлетворяющее аксиоме локальной конечности:

$$|A(\gamma_i, \gamma_j)| < \infty, \tag{17}$$

где $|A(\gamma_i, \gamma_j)|$ - множество Александрова элементов γ_i и γ_j, то есть множество элементов γ_k таких, что $\gamma_i \prec \gamma_k \prec \gamma_j$. Аксиома локальной конечности заменяет аксиому конечности. Следует отметить, что сама по себе локальная конечность позволяет иметь элементу бесконечное число элементов, которые непосредственно следуют или предшествуют ему. Однако, в бесконечном динамическом графе число непосредственных соседей элемента не может превышать четырех. В результате конечно число соседей элемента в любом порядке.

Лемма 16 *В бесконечном динамическом графе для любого конечного целого положительного числа k существует только конечное число элементов, находящихся на расстоянии не больше чем k от любого элемента γ.*

Доказательство. Маршруты, выходящие из любого элемента, образуют ветвящееся дерево. В каждой вершине (х-структуре) число неориентированных маршрутов утраивается. Таким образом, число неориентированных маршрутов длины k, выходящих из элемента γ, не может быть больше $3[k/2] + 3[(k+1)/2]$, где квадратные скобки обозначают функцию «целая часть числа». За длину маршрута k принимаем число элементов в маршруте, не включая первый, но включая последний. В этом случае элемент соединен маршрутами единичной длины с непосредственно предшествующим ему элементом, непосредственно следующим и смежными. Число элементов на расстоянии не более k от γ не превышает суммы числа маршрутов длины от 1 до k. Соответственно, число различных элементов, расположенных на расстоянии не больше чем k от γ, конечно. ■

Для анализа симметрии динамических графов будем рассматривать только бесконечные структуры конечной (заданной) ширины.

Лемма 17 *Бесконечный динамический граф конечной ширины содержит ориентированный маршрут бесконечной глубины.*

Доказательство. Пусть ширина бесконечного динамического графа равна n. Предположим, что все полные ориентированные маршруты имеют конечную глубину. Возьмем произвольный элемент γ_1. Он может входить в состав нескольких полных ориентированных маршрутов. Пусть их максимальная глубина равна k. Любой полный ориентированный маршрут, содержащий элемент γ_1, может быть представлен как объединение ориентированного маршрута, входящего в элемент γ_1, и ориентированного маршрута, выходящего из элемента γ_1. Рассмотрим ориентированные маршруты, выходящие из элемента γ_1. Они образуют ветвящееся дерево. В каждой вершине (x-структуре) число ориентированных маршрутов удваивается. Таким образом, число ориентированных маршрутов, выходящих из элемента γ_1, не может быть больше $2[(k+1)/2]$, где квадратные скобки обозначают функцию «целая часть числа». Аналогично для ориентированных маршрутов, входящих в элемент γ_1. Следовательно, общее число полных ориентированных маршрутов, содержащих элемент γ_1, конечно. Конечное число конечных ориентированных маршрутов содержит конечное число элементов. Следовательно, существует конечное число элементов, связанных отношением упорядочения с элементом γ_1. Вместе с элементом γ_1 они образуют конечное множество M_1. Рассмотрим элемент γ_2 бесконечного динамического графа, который не принадлежит M_1. Элементы γ_1 и γ_2 образуют антицепь. Повторив рассуждения для элемента γ_2, получим конечное множество M_2 элементов, содержащее элемент γ_2 и все элементы, находящиеся с ним в отношении упорядочения. Множества M_1 и M_2 могут пересекаться. Выберем элемент γ_3, который не принадлежит множествам M_1 и M_2. Элементы γ_1, γ_2 и γ_3 образуют антицепь. Повторив рассуждения $n+1$ раз, получим антицепь, содержащую $n+1$ элементов, что противоречит ширине бесконечного динамического графа, равной n. ■

Отметим, что условие бинарности бесконечного динамического графа несущественно в доказательстве леммы. Пусть вершины являются не х-структурами, а содержат произвольное число входящих и выходящих элементов. Все входящие (и все выходящие) в вершину элементы образуют антицепь. Если ширина бесконечного динамического графа равна n, то он не содержит вершин, в которых число входящих или выходящих элементов больше n. В этом случае число ориентированных маршрутов, выходящих из некоторого элемента, с ростом их длины растет не больше, чем степень n вместо степени 2 в доказательстве леммы. В остальном доказательство остается без изменений.

Аналогично теории кристаллов для изучения симметрий бесконечного динамического графа следует исключить граничные эффекты, нарушающие симметрию. Согласно лемме 15 бесконечный динамический граф конечной ширины n, содержит $2n$ внешних элементов. Если эти внешние элементы удалены на бесконечность, то по аналогии с идеальным кристаллом назовем бесконечный динамический граф идеальным. Более строго бесконечный динамический граф конечной ширины называется идеальным, если для любого внутреннего элемента γ и любого конечного числа k все элементы, находящиеся от элемента γ на расстоянии не больше k, являются внутренними. Ниже для краткости будем использовать термин идеальный динамический граф.

Приведем некоторые сведения из теории групп, которые будут использованы при анализе симметрий идеальных динамических графов. Циклической подстановкой называется подстановка, переводящая каждый из записанных в определенном порядке элементов в следующий, а последний в первый. Длина циклической подстановки - это число входящих в нее элементов. Транспозиция - циклическая подстановка длины 2. Независимыми называются циклические подстановки, не имеющие общих элементов. Произведением подстановок называется их последовательное выполнение. Любая подстановка допускает разложение в произведение независимых циклических подстановок. Подстановка называется тождественной, или единичной и обозначается $\boldsymbol{I}$, если под ее действием все элементы переходят в себя. Произведение преобразований симметрии очевидно является преобразованием симметрии. Аналогично идеальным кристаллам преобразования симметрии идеального динамического графа образуют группы, единичным элементом которых является тождественная подстановка. Ниже преобразования симметрии будут обозначаться жирными прописными латинскими буквами.

Каждая циклическая подстановка, в которые разлагается любая подстановка, записывается в виде последовательности элементов $\dots \gamma_i \dots \gamma_m \dots$ Под действием циклической подстановки происходит замена каждого элемента последовательности на соседний ему слева элемент, а первый элемент заменяется на последний. Очевидно, что циклическая подстановка может входить в преобразование симметрии идеального динамического графа только, если она действует на элементы одного сорта. Пусть число элементов между элементами γ_i и γ_m равно n. При изучении преобразований симметрии идеального динамического графа будем рассматривать только такие подстановки, для которых при любом конечном n элементы γ_i и γ_m или принадлежат различным несвязанным компонентам идеального динамического графа, или расстояние между ними конечно. Тем самым, исключаются из рассмотрения подстановки, в которых элемент образ удален на бесконечность.

Идеальный динамический граф может иметь преобразования симметрии следующих видов. Конечная подстановка - подстановка, меняющая нумерацию конечного числа элементов. Конечная подстановка разложима в произведение конечного числа независимых нетождественных циклических подстановок конечной длины.

Конечно разложимая подстановка - подстановка, меняющая нумерацию бесконечного числа элементов и разложимая в произведение счетного числа конечных подстановок. Конечно разложимая подстановка разложима в произведение счетного числа независимых нетождественных циклических подстановок конечной длины.

Указанные выше два типа преобразований симметрии обладают следующим свойством.

Лемма 18 *Конечная или конечно разложимая подстановка может являться преобразованием симметрии идеального динамического графа только, если каждая составляющая ее циклическая подстановка происходит между элементами, составляющими антицепь.*

Доказательство. Докажем лемму от противного. Предположим, что имеется циклическая подстановка $\boldsymbol{P}$ конечной длины, которая содержит два элемента γ_1 и γ_2, связанные отношением упорядочения $\gamma_1 \prec \gamma_2$. Элемент γ_2 является образом некоторого порядка n элемента γ_1 ($\gamma_2 = \boldsymbol{P}^n(\gamma_1)$). Поскольку преобразование симметрии сохраняет отношение упорядочения, то для образов порядка n $\gamma_2 = \boldsymbol{P}^n(\gamma_1)$ и $\gamma_3 = \boldsymbol{P}^n(\gamma_2)$ имеем $\gamma_2 \prec \gamma_3$. Аналогично для образов порядка n $\gamma_3 = \boldsymbol{P}^n(\gamma_2)$ и $\gamma_4 = \boldsymbol{P}^n(\gamma_3)$ имеем $\gamma_3 \prec \gamma_4$. В результате получаем бесконечную линейно упорядоченную последовательность элементов. Все эти элементы принадлежат подстановке $\boldsymbol{P}$. Поскольку $\boldsymbol{P}$ включает конечное число элементов, то элементы полученной последовательности должны повторяться, что противоречит аксиоме 16. ■

Из доказанной леммы следует, что преобразование симметрии идеального динамического графа может включать циклические подстановки или бесконечной длины, или длины, не больше ширины идеального динамического графа.

Третий вид преобразований симметрии - трансляция. Трансляция - это подстановка, представляющая собой произведение конечного числа независимых циклических подстановок бесконечной длины.

Для идеального динамического графа можно ввести понятие элементарной ячейки трансляции. Элементарная ячейка трансляции - это множество элементов идеального динамического графа, для которых справедливы следующие свойства.

1. Ни один элемент не является образом другого.

2. Любой элемент, не принадлежащий элементарной ячейке, но находящийся на конечном расстоянии от некоторого элемента элементарной ячейки, является образом конечного порядка некоторого элемента элементарной ячейки.

3. Для элементов, принадлежащих связной компоненте идеального динамического графа, минимальна сумма расстояний между парами этих элементов.

Отметим, что элементы одной элементарной ячейки, принадлежащие связной компоненте идеального динамического графа, не обязательно образуют связное множество, и ячейка не обязательно определяется однозначно.

По определению число элементов в элементарной ячейке равно числу циклических подстановок бесконечной длины, составляющих трансляцию. Поэтому, в случае неоднозначного выбора элементарной ячейки число элементов в элементарной ячейке одинаково при любом ее выборе.

Лемма 19 *Если число элементов элементарной ячейки трансляции* $\boldsymbol{T}$ *равно* n*, то число элементов элементарной ячейки трансляции* $\boldsymbol{T}^k$ *равно* $n|k|$*, для любого целого числа* k*.*

Доказательство. Число циклических подстановок бесконечной длины в $\boldsymbol{T}$ равно n. Элементы каждой такой подстановки в $\boldsymbol{T}^k$ образуют $|k|$ циклических подстановок бесконечной длины. Следовательно, число циклических подстановок бесконечной длины трансляции $\boldsymbol{T}^k$ равно $n|k|$, для любого целого числа k. ■

С физической точки зрения представляет интерес специальный вид трансляции - хронологическая трансляция. Назовем трансляцию хронологической, если каждый элемент прообраз связан со своим образом отношением упорядочения. Назовем трансляцию хронологической в будущее, если каждый элемент прообраз предшествует своему образу. Назовем трансляцию хронологической в прошлое, если каждый элемент прообраз следует своему образу. Идеальный динамический граф, преобразованием симметрии которого является хронологическая трансляция, представляет собой бесконечный периодический процесс. Большим периодом хронологической трансляции назовем длину максимального ориентированного маршрута между элементом прообразом и элементом образом. Малым периодом хронологической трансляции назовем длину минимального ориентированного маршрута между элементом прообразом и элементом образом.

Лемма 20 *Если идеальный динамический граф G имеет трансляционную симметрию $\boldsymbol{T}$, то существует некоторая конечная целая степень k, что $\boldsymbol{T}^k$ является хронологической трансляцией.*

Доказательство. Пусть ширина G равна n. Рассмотрим циклическую подстановку $\boldsymbol{R}_1$ бесконечной длины, входящую в состав $\boldsymbol{T}$. Рассмотрим элемент γ_1, на который действует $\boldsymbol{R}_1$. Пусть $\boldsymbol{R}_1(\gamma_1) = \gamma_2$. Если γ_1 и γ_2 находятся в отношении частичного упорядочения, то перейдем к рассмотрению следующей циклической подстановки $\boldsymbol{R}_2$, входящей в состав $\boldsymbol{T}$. В противном случае γ_1 и γ_2 составляют антицепь. В этом случае рассмотрим $\boldsymbol{R}_1^2$. Пусть $\boldsymbol{R}_1^2(\gamma_1) = \gamma_3$. Следовательно, $\boldsymbol{R}_1(\gamma_2) = \gamma_3$, и γ_2 и γ_3 составляют антицепь, так как их прообразы составляют антицепь. Если γ_1 и γ_3 находятся в отношении частичного упорядочения, то перейдем к рассмотрению следующей циклической подстановки $\boldsymbol{R}_2$, входящей в состав $\boldsymbol{T}$. В противном случае γ_1, γ_2 и γ_3 составляют антицепь. Повторяя рассуждения найдем целое число $k(1)$, что $\boldsymbol{R}_1^{k(1)}(\gamma_1) = \gamma_{k(1)}$, и γ_1 и $\gamma_{k(1)}$ связаны отношением частичного упорядочения. $k(1) \leqslant n$, так как в противном случае будет построена антицепь шире, чем ширина G. Повторяя рассуждения для всех циклических подстановок $\boldsymbol{R}_i$ бесконечной длины, составляющих $\boldsymbol{T}$, получим набор целых степеней $k(i) \leqslant n$ таких, что $\boldsymbol{R}_1^{k(i)}(\gamma_{1(i)}) = \gamma_{k(i)}$, и $\gamma_{1(i)}$ и $\gamma_{k(i)}$ находятся в отношении частичного упорядочения. $k = n!$ делится на любое число $k(i)$. Следовательно, $\boldsymbol{T}^k$ переводит любой элемент прообраз, принадлежащий G, в элемент образ так, что элемент прообраз и элемент образ находятся в отношении частичного упорядочения. ■

В несвязном идеальном динамическом графе хронологическая трансляция может быть хронологической трансляцией в прошлое для одних компонент, и хронологической трансляцией в будущее для других компонент. Однако, для связного идеального динамического графа справедлива следующая лемма.

Лемма 21 *Для связного идеального динамического графа G хронологическая трансляция $\boldsymbol{T}$ является или хронологической трансляцией в будущее, или хронологической трансляцией в прошлое.*

Доказательство. Необходимо доказать, что если для элементов γ_1 и γ_2 таких, что $\boldsymbol{T}(\gamma_1) = \gamma_2$, справедливо $\gamma_1 \prec \gamma_2$, то не существует элементов γ_3 и γ_4 таких, что $\boldsymbol{T}(\gamma_3) = \gamma_4$ и $\gamma_4 \prec \gamma_3$. Докажем лемму от противного. Предположим, что указанные γ_3 и γ_4 существуют. Последовательность образов γ_3 различных порядков образует бесконечную линейно упорядоченную последовательность. Рассмотрим полную антицепь A, содержащую γ_1. Возьмем элемент, являющийся образом γ_3 некоторого порядка, и лежащий в прошлом A. Для этого возьмем γ_3. Если он лежит в прошлом A, то возьмем его. Если γ_3 принадлежит A, то возьмем γ_4. Если γ_3 лежит в будущем A, то в силу локальной конечности идеального динамического графа в будущем A лежит только конечное число m элементов, предшествующих γ_3. Следовательно, образ γ_3 порядка больше $m+1$ лежит в прошлом A. Обозначим его γ_5. Рассмотрим кратчайший маршрут между γ_2 и γ_5. По теореме 4 он содержит элемент, принадлежащий A. Пусть длина этого маршрута равна k. Для элементов $\gamma_6 = \boldsymbol{T}(\gamma_2)$ и $\gamma_7 = \boldsymbol{T}(\gamma_5)$ имеем $\gamma_2 \prec \gamma_6$ и $\gamma_7 \prec \gamma_5$. Поскольку преобразование симметрии сохраняет топологию G, то длина кратчайшего маршрута между γ_6 и γ_7 равна k. По теореме 4 и этот маршрут содержит элемент, принадлежащий A. При повторении операции $\boldsymbol{T}$ получается бесконечная последовательность несовпадающих элементов $\boldsymbol{T}^n(\gamma_2)$, каждый из которых находится на расстоянии не больше k от некоторого элемента, принадлежащего A. Число элементов на расстоянии не больше k от некоторого произвольного элемента конечно согласно лемме 16. Число элементов, принадлежащих A, конечно и равно ширине G. Следовательно, конечно число элементов, каждый из которых находится на расстоянии не больше k от некоторого элемента, принадлежащего A. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

Из леммы 21 следует, что в связном идеальном динамическом графе образы антицепи при хронологической трансляции образуют линейно упорядоченную последовательность. Следует отметить, что если трансляция не является хронологической, что образ антицепи может содержать как элементы, лежащие в прошлом антицепи прообраза, так и в ее будущем. Пример приведен в конце следующего параграфа. Из лемм 20 и 21 следует важное свойство идеального динамического графа.

Лемма 22 *Преобразование симметрии идеального динамического графа может включать только конечное произведение циклических подстановок бесконечной длины.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для случая связного идеального динамического графа. Для этого достаточно доказать конечность числа элементов в элементарной ячейке хронологической трансляции $\boldsymbol{T}$. При этом конечность числа элементов в элементарной ячейке произвольной трансляции следует из леммы 20. Пусть при $\boldsymbol{T}$ образом элемента γ_1 является элемент γ_2. Рассмотрим полную антицепь A, включающую γ_1, и такую, что минимальна сумма расстояний между парами элементов A. $\boldsymbol{T}$ переводит A в антицепь, включающую γ_2. Поскольку $\boldsymbol{T}$ хронологическая трансляция, то или $\gamma_1 \prec \gamma_2$, или $\gamma_2 \prec \gamma_1$. Для определенности выберем первый случай. Рассмотрение второго случая аналогично. Пусть m - длина максимального ориентированного маршрута между элементом, принадлежащим A, и элементом, принадлежащим образу A. Рассмотрим множество M элементов, расстояние от которых до какого-либо элемента A не больше m. Покажем, что любой элемент γ идеального динамического графа является образом некоторого порядка какого-то элемента множества M. Если γ принадлежит A, или ее образу какого-то порядка, то γ очевидно принадлежит образу M. Рассмотрим противоположный случай. Для этого надо показать, что расстояние от γ до образа некоторого порядка какого-то элемента A не больше m. Поскольку A полная антицепь, в ее образе любого порядка существует элемент γ_3, для которого $\gamma_3 \prec \gamma$, или $\gamma \prec \gamma_3$. Предположим, что γ лежит в будущем A. Противоположный случай аналогичен. Расстояние от γ до A конечно. Пусть длина кратчайшего ориентированного маршрута от некоторого элемента A до γ равна r. В силу леммы 21 образы A образуют бесконечную линейно упорядоченную последовательность, причем A не имеет общих элементов со своими образами, так как трансляция хронологическая. Таким образом, длина любого ориентированного маршрута между элементами A и $A_r = \boldsymbol{T}^r(A)$ не меньше r. Следовательно, γ лежит в прошлом A_{r+1}. При этом можно выбрать такое целое число $l < r+1$, что образ A порядка l содержит элемент γ_4, для которого $\gamma_4 \prec \gamma$, а образ A порядка $l+1$ содержит элемент γ_5, для которого $\gamma \prec \gamma_5$. Соотношение $\gamma_4 \prec \gamma \prec \gamma_5$ означает, что γ принадлежит ориентированному маршруту из γ_4 в γ_5. Следовательно, расстояние между γ и γ_4 и расстояние между γ и γ_5 не больше m, и γ является образом порядка l некоторого элемента множества M. Таким образом, элементарная ячейка $\boldsymbol{T}$ является подмножеством множества M и включает конечное число элементов в силу конечности M.

Теперь рассмотрим случай несвязного идеального динамического графа G. Число компонент n конечно, так как заведомо не больше ширины G. Следовательно, для любой трансляции $\boldsymbol{T}$ существует некоторая положительная степень $q(1) \leqslant n$, что $\boldsymbol{T}^{q(1)}$ переводит все элементы некоторой компоненты G_1 в элементы этой же компоненты. Аналогично для компоненты G_2 существует некоторая положительная степень $q(2) \leqslant n$. Тогда, $(\boldsymbol{T}^{q(1)})^{q(2)}$ переводит все элементы G_1 в элементы G_1, а все элементы G_2 в элементы G_2. Последовательно продолжая построение получаем трансляцию, которая преобразует элементы каждой компоненты независимо от элементов остальных компонент. Справедливость леммы для этого случая доказана выше. Поскольку степень трансляции состоит из конечного числа циклических подстановок бесконечной длины, то и сама трансляция состоит из конечного числа циклических подстановок бесконечной длины. Это следует из того, что элементарная ячейка степени трансляции не меньше, чем элементарная ячейка самой трансляции согласно лемме 19. ■

Рассмотренные три вида подстановок исчерпывают возможные преобразования симметрии типа подстановки связных идеальных динамических графов в силу следующей леммы.

Лемма 23 *Преобразование симметрии связного идеального динамического графа раскладывается в произведение независимых циклических подстановок или только конечной длины, или только бесконечной длины.*

Доказательство. Докажем лемму от противного. Пусть ширина односвязного идеального динамического графа G равна n. Предположим, что преобразование симметрии $\boldsymbol{A}$ содержит циклическую подстановку $\boldsymbol{B}$ конечной длины и циклическую подстановку $\boldsymbol{C}$ бесконечной длины. Любая степень $\boldsymbol{A}$ также является преобразованием симметрии G. Рассмотрим элемент γ_1, который переставляется $\boldsymbol{B}$. Поскольку длина $\boldsymbol{B}$ не превышает n, существует такая степень $m < n$, что при $\boldsymbol{A}^m$ образом γ_1 является сам γ_1. Рассмотрим элемент γ_2, который переставляется $\boldsymbol{C}$. Пусть расстояние от γ_1 до γ_2 равно k. Образом γ_2 при $\boldsymbol{A}^m$ является γ_3. В силу сохранения топологии G при преобразованиях симметрии расстояние от γ_1 до γ_3 тоже равно k. В свою очередь образом γ_3 при $\boldsymbol{A}^m$ является γ_4, и расстояние от γ_1 до γ_4 тоже равно k. Повторяя рассуждение, получаем множество элементов, находящихся на расстоянии k от γ_1. Это множество счетно, так как длина $\boldsymbol{C}$ бесконечна, что противоречит лемме 16. Полученное противоречие доказывает лемму. ■

В несвязном идеальном динамическом графе преобразование симметрии может действовать независимо на различные компоненты. Соответственно для различных компонент преобразование симметрии может относиться к различным видам. Например, преобразование симметрии является трансляцией одной компоненты и конечной подстановкой другой компоненты.

Следующие две леммы справедливы для более широкого класса связных идеальных динамических графов, чем связные идеальные динамические графы с симметрией.

Лемма 24 *Пусть для идеального динамического графа G существует положительное целое число k, что для любой полной антицепи A, принадлежащей G, расстояние между любыми двумя элементами антицепи A не превышает k. Тогда необходимым и достаточным условием этого свойства является то, что для любого элемента γ, принадлежащего G, любой другой элемент G, находящийся от γ, на расстоянии больше k, находится с γ в отношении частичного упорядочения.*

Доказательство. Докажем необходимость от противного. Построим произвольную полную антицепь, которой принадлежит γ. Предположим, что существует элемент γ_1, который расположен от γ на расстоянии больше k и не связан с γ отношением частичного упорядочения. Тогда можно построить антицепь, которая включает элементы γ и γ_1, что противоречит условию леммы. Алгоритм построения приведен в доказательстве леммы 13. Достаточность условия очевидна, так как в антицепь могут входить только элементы, не связанные отношением частичного упорядочения, то если таковых нет на расстоянии больше k, то их и не будет в антицепи. ■

Из доказанной леммы и леммы 16 следует, что в идеальном динамическом графе, удовлетворяющем условиям леммы, для любого элемента число элементов, не связанных с ним отношением частичного упорядочения, конечно. Следовательно, каждый элемент принадлежит только конечному числу антицепей. Из леммы 24 также следует следующая лемма.

Лемма 25 *Пусть для идеального динамического графа G существует положительное целое число k, что для любой полной антицепи A, принадлежащей G, расстояние между любыми двумя элементами антицепи A не превышает k. Тогда для любого элемента γ, принадлежащего G, и любой бесконечной линейно упорядоченной последовательности S*

элементов G можно выбрать элемент γ_1, принадлежащий S, для которого $\gamma \prec \gamma_1$, и можно выбрать элемент γ_2, принадлежащий S, для которого $\gamma_2 \prec \gamma$.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент γ_3, принадлежащий S. Возможны три варианта: $\gamma \prec \gamma_3$, $\gamma_3 \prec \gamma$ и γ не связан отношением частичного упорядочения с γ_3. Если $\gamma \prec \gamma_3$, то γ_3 есть искомый элемент γ_1. Найдем γ_2 по следующему алгоритму. Будем последовательно рассматривать предшествующие γ_3 элементы S. Число элементов γ_4, принадлежащих S, таких, что $\gamma \prec \gamma_4 \prec \gamma_3$, конечно в силу аксиомы локальной конечности (17). Элементы S, предшествующие γ_3, и не принадлежащие $A(\gamma_1, \gamma_3)$, могут быть не связаны с γ отношением частичного упорядочения. В силу лемм 16 и 24 таких элементов γ_5 также конечное число. Предшествующие элементам вида γ_5 элементы γ_6, принадлежащие S, не могут следовать γ, так как в этом случае из $\gamma \prec \gamma_6$ и $\gamma_6 \prec \gamma_5$ получаем $\gamma \prec \gamma_5$, что противоречит предположению об отсутствии отношения частичного упорядочения между γ и γ_5. Следовательно, $\gamma_6 \prec \gamma$, то есть γ_6 есть искомый элемент γ_2. В силу леммы 3 из справедливости леммы в первом варианте следует справедливость леммы во втором варианте. Построение полностью аналогично с точностью до замены направления отношения частичного упорядочения. В случае, когда γ не связан отношением частичного упорядочения с γ_3, построение также аналогично приведенному выше. Следует идентифицировать γ_3 с γ_5 из первого варианта. После чего аналогично находится γ_2. В силу леммы 3 γ_1 находится аналогично γ_2 с точностью до замены направления отношения частичного упорядочения. ■

Леммы 24 и 25 описывают свойства идеального динамического графа с трансляционной симметрией согласно следующей лемме.

Лемма 26 *Если связный идеальный динамический граф G обладает трансляционной симметрией, тогда существует целое число k, что для любого элемента γ, принадлежащего G, любой другой элемент G, находящийся от γ, на расстоянии больше k, находится с γ в отношении частичного упорядочения.*

Доказательство. Соласно лемме 20 G обладает хронологической трансляционной симметрией. Рассмотрим произвольную антицепь A_1, включающую элемент γ. Пусть максимальное расстояние между ее элементами равно k_1. Рассмотрим антицепь A_2, являющуюся образом A_1 некоторого порядка в будущем A_1 при хронологической трансляции, такую, что расстояние от любого элемента A_1 до любого элемента A_2 больше k_1. A_2 может быть выбрана в будущем, поскольку антицепи образуют линейно упорядоченную последовательность согласно лемме 21. Если A_2 является образом A_1 порядка больше k_1, то элементы A_2 заведомо находятся на расстоянии больше k_1 от любого элемента A_1, так как согласно теореме 4 любой маршрут между элементом A_1 и элементом A_2 содержит хотя бы по одному элементу каждой из k_1 антицепей, и антицепи не имеют общих элементов.

Рассмотрим пересечение A_{02} конуса будущего $LF(\gamma)$ элемента γ и A_2. Множество оставшихся элементов A_2 обозначим A_{12}. Поскольку A_2 является образом A_1, то расстояние между любой парой элементов A_2 не больше k_1. Следовательно, существует хотя бы один маршрут S длины k_1, соединяющий элемент множества A_{02} и элемент множества A_{12}. Поскольку A_2 полностью лежит в будущем A_1 на расстоянии больше k_1, то S полностью лежит в будущем A_1. S содержит хотя бы одну пару соседних элементов γ_1 и γ_2, где γ_1 принадлежит $LF(\gamma)$, а γ_2 нет. Рассмотрение возможных пар соседних элементов (аналогичное приведенному в доказательстве теоремы 6) показывает, что элемент γ_2 должен являться элементом сорта β. Остальные элементы x-структуры принадлежат $LF(\gamma)$, и каждый из них может являться элементом γ_1. Построим антицепь A_3 из γ_2 и элементов антицепи A_2 по алгоритму, приведенному в доказательстве леммы 13. Построим антицепь A_4 из смежного γ_2 элемента и элементов антицепи A_3 по тому же алгоритму. По построению A_4 содержит γ_2. По построению A_4 лежит в будущем A_1. A_4 содержит некоторое число m элементов, которые не принадлежат $LF(\gamma)$. Соответственно, A_4 содержит $n-m$ элементов, которые принадлежат $LF(\gamma)$, где n ширина G. Построим, антицепь A_5, которая получается заменой в A_4 γ_2 и смежного ему элемента, на два элемента сорта α, принадлежащих той же x-структуре. Эти элементы сорта α принадлежат $LF(\gamma)$. По построению A_5 содержит $m-1$ элементов, которые не принадлежат $LF(\gamma)$ и $n-m+1$ элементов, которые принадлежат $LF(\gamma)$. Построим антицепь A_6, являющуюся образом A_5 аналогично тому, как A_2 является образом A_1. Повторяя рассуждения, построим последовательно антицепи A_7, A_8 и A_9. По построению число элементов A_9, принадлежащих $LF(\gamma)$, на один больше, чем число элементов A_8, принадлежащих $LF(\gamma)$. По теореме 6 число элементов, принадлежащих $LF(\gamma)$, в любой антицепи, находящейся в будущем A_5 не меньше $n-m+1$. Следовательно, число элементов A_8, принадлежащих $LF(\gamma)$, не меньше $n-m+1$, а число элементов A_9, принадлежащих $LF(\gamma)$, не меньше $n-m+2$. Повторяя построение m раз получаем антицепь A_f, все элементы которой принадлежат $LF(\gamma)$. Следовательно, все элементы в будущем A_f принадлежат $LF(\gamma)$. Согласно леммы 3 существует антицепь A_p, все элементы которой находятся в световом конусе прошлого элемента γ. Таким образом, элементы, которые не находятся с γ в отношении частичного упорядочения могут принадлежать только множеству элементов, находящихся в будущем A_p и в прошлом A_f. В силу локальной конечности G число таких элементов конечно и они располагаются на конечном расстоянии от γ. ■

Конечные произведения преобразований симметрии снова являются преобразованиями симметрии. Бесконечные произведения преобразований симметрии можно рассматривать только, если они корректно определены, то есть каждому элементу прообразу ставится в соответствие определенный элемент образ. При этом для каждого элемента действие только произведения конечного числа преобразований симметрии отлично от действия тривиальной подстановки, а действие произведения остального бесконечного количества преобразований симметрии совпадает с действием тривиальной подстановки. Это аналог сходимости для дискретной последовательности элементов образов, получаемых при последовательном выполнении преобразований симметрии.

Произведение конечного числа конечных подстановок дает конечную подстановку. Конечное, или корректно определенное бесконечное произведение конечных подстановок и конечно разложимых подстановок дает или конечную подстановку, или конечно разложимую подстановку. Трансляция, то есть произведение циклических подстановок бесконечной длины, не может быть получена в результате такого произведения, так как произведение любого конечного числа конечных и конечно разложимых преобразований симметрии переставляет номера элементов только в пределах антицепей в силу леммы 18, и не может привести к циклическим подстановкам длины, превышающей ширину идеального динамического графа. Произведение конечного числа трансляций может являться преобразованием симметрии любого рассмотренного вида, так же как и корректно определенное произведение бесконечного числа трансляций. Примеры приведены в следующем параграфе.

Отметим, что произведение трансляции и конечной подстановки, или конечно разложимой подстановки, действующей на те же компоненты несвязного идеального динамического графа, дает трансляцию. Достаточно рассмотреть произведение трансляции и циклической подстановки конечной длины. Трансляция представляет собой произведение конечного числа циклических подстановок бесконечной длины. Подстановка бесконечной длины представляет собой бесконечную последовательность неповторяющихся элементов, в которой каждый предыдущий элемент представляет собой прообраз последующего. Возможны три случая. Во-первых, циклическая подстановка конечной длины может переставлять элементы одной и той же подстановки бесконечной длины. Очевидно, что результатом является новая бесконечная последовательность неповторяющихся элементов, в которой каждый предыдущий элемент представляет собой прообраз последующего, то есть циклическая подстановка бесконечной длины. Пример такого случая приведен в следующем параграфе. Во-вторых, циклическая подстановка конечной длины может переставлять элементы между несколькими подстановками бесконечной длины, по одному в каждой подстановке. Очевидно, что результатом являются новые циклические подстановки бесконечной длины. В общем случае подстановка конечной длины может переставлять часть элементов в пределах одной и той же подстановки бесконечной длины, а часть элементов между несколькими подстановками бесконечной длины. Очевидно, что и в этом случае результатом являются новые циклические подстановки бесконечной длины. В результате произведения конечного числа циклических подстановок бесконечной длины и циклической подстановки конечной длины получается новое произведение конечного числа циклических подстановок бесконечной длины, то есть трансляция.

Если идеальный динамический граф обладает трансляционной симметрией, то он обладает бесконечным числом преобразований симметрии, так как все степени трансляции различны и являются его преобразованиями симметрии.

Помимо симметрий типа подстановки динамический граф может обладать симметрией типа инверсии. Инверсией идеального динамического графа назовем подстановку с заменой элементов сорта α на элементы сорта β, элементов сорта β на элементы сорта α, и заменой направления отношения непосредственного следования. Инверсия является допустимым преобразованием динамического графа, так как согласно леммы 3 в результате инверсии получается динамический граф. Идеальный динамический граф обладает симметрией типа инверсия, если каждый элемент образ находится в тех же отношениях частичного упорядочения с другими элементами образами, что его элемент прообраз с элементами прообразами указанных других элементов образов. Очевидно, что инверсия идеального динамического графа состоит из счетного числа транспозиций.

В общем случае преобразование симметрии является произведением других преобразований симметрии. Для характеристики свойств симметрии идеального динамического графа следует выделить множество элементарных преобразований симметрии. По определению множество M элементарных преобразований симметрии идеального динамического графа G удовлетворяет следующим свойствам:

1. Любое другое преобразование симметрии G может быть получено, как произведение элементов M.

2. Любой элемент M не может быть получен, как произведение других элементов M.

Отметим, что задание множества M в общем случае не однозначно. Покажем это на примере. Пусть G содержит кратное ребро. Рассмотрим подстановку $\boldsymbol{P}$, которая переставляет элементы в кратном ребре так, что ребра в кратном ребре переставляются, а все остальные элементы G не переставляются. Очевидно, что P является преобразованием симметрии и $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{I}$. Пусть G обладает другим преобразованием симметрии $\boldsymbol{A}$. Тогда $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PA}$ - тоже преобразование симметрии G. Имеем $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PB}$. Таким образом, множество M включает или элементы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{A}$, или элементы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{B}$. Элементы множества M будем называть элементарными преобразованиями симметрии.

Рассмотрим простейшие примеры.

5.6 Примеры простейших структур с симметриями

Структура ширины 0 не содержит элементов.

Структура ширины 1 является линейно упорядоченной последовательностью элементов. Она не является динамическим графом.

Минимальный динамический граф по определению содержит одну x-структуру (рис. 3). x-структура имеет ширину 2. Структура ширины 2 может содержать произвольное число x-структур. При этом она имеет вид линейно упорядоченной последовательности кратных ребер (рис. 11).

Идеальный динамический граф ширины 2 представляет собой бесконечную последовательность кратных ребер. Его преобразованием симметрии является подстановка $\boldsymbol{P}$, состоящая из двух транспозиций:

$$\alpha_{2i-1}\alpha_{2i} \text{ и } \beta_{2i-1}\beta_{2i} \quad , \tag{18}$$

где i - произвольное фиксированное целое число. В этой формуле и далее используется обозначение подстановок в виде последовательности элементов, в которой у каждого элемента номер заменяется на номер элемента, стоящего справа. У крайнего правого элемента номер заменяется на номер крайнего левого элемента. Множество элементарных преобразований симметрии включает счетное количество подстановок $\boldsymbol{P}$ вида (18). Соответственно идеальный динамический граф ширины 2 обладает счетным множеством преобразований симметрии - конечных подстановок, каждая из которых является произведением конечного числа подстановок $\boldsymbol{P}$ вида (18). Он также обладает счетным множеством преобразований симметрии - конечно разложимых подстановок, каждая из которых является произведением бесконечного числа подстановок $\boldsymbol{P}$ ви-

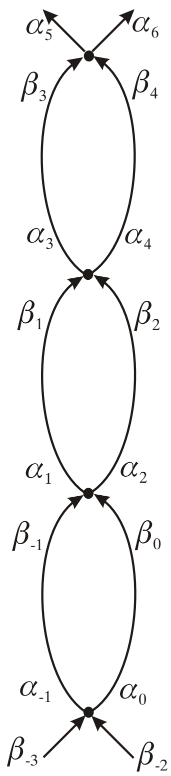

Рис. 11: Идеальный динамический граф ширины 2.

да (18). Отметим, что если любой идеальный динамический граф содержит кратное ребро, то его элементарным преобразованием симметрии является подстановка $\boldsymbol{P}$ вида (18). Множество элементарных преобразований симметрии включает хронологическую трансляцию в будущее $\boldsymbol{T}$, которая состоит из четырех циклических подстановок бесконечной длины:

$$\begin{aligned} &\ldots \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{2n-1} \ldots, \\ &\ldots \alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_{2n} \ldots, \\ &\ldots \beta_1 \beta_3 \ldots \beta_{2n-1} \ldots, \\ &\ldots \beta_2 \beta_4 \ldots \beta_{2n} \ldots, \end{aligned} \tag{19}$$

где n пробегает все множество целых чисел. Ее большой и малый периоды совпадают и равны 2. Элементарной ячейкой можно выбрать кратное ребро, или x-структуру. Элементарная ячейка содержит 4 элемента. Для идеального динамического графа ширины 2 можно привести пример произведения двух трансляций, которое дает конечную подстановку.

Рассмотрим трансляцию $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}$. Имеем $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{P}$.

Идеальный динамический граф ширины 2 обладает счетным множеством трансляций, которое состоит из произвольного конечного множества трансляций $\boldsymbol{T}$ вида (19), или обратных им трансляций и произвольного конечного, или счетного множества транспозиций $\boldsymbol{P}$ вида (18).

Идеальный динамический граф ширины 2 обладает симметрией типа инверсия $\boldsymbol{R}$, состоящей из счетного числа транспозиций с заменой всех элементов сорта α на элементы сорта β, всех элементов сорта β на элементы сорта α, и заменой направления отношения непосредственного следования:

$$\begin{array}{l} \alpha_{2n}\beta_{-2n-2} \quad , \\ \beta_{2n}\alpha_{-2n-2} \quad , \\ \alpha_{2n+1}\beta_{2n+1} \quad , \\ \beta_{2n+1}\alpha_{2n+1} \quad , \end{array} \tag{20}$$

где n пробегает все множество целых чисел. Идеальный динамический граф ширины 2 обладает счетным множеством симметрией типа инверсия, которые состоят из произведения инверсии $\boldsymbol{R}$ вида (20) на произвольное конечное, или счетное множество транспозиций $\boldsymbol{P}$ вида (18), или на произвольную трансляцию, являющуюся преобразованием симметрии идеального динамического графа ширины 2.

Простейший динамический граф ширины 3 представлен на рисунке 12.

Его множество элементарных преобразований симметрии состоит из одной трансляции и инверсии. Это нехронологическая трансляция, которая состоит из четырех циклических подстановок бесконечной длины:

$$\begin{array}{l} \ldots\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2n-1}\ldots, \\ \ldots\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{2n}\ldots, \\ \ldots\beta_1\beta_3\ldots\beta_{2n-1}\ldots, \\ \ldots\beta_2\beta_4\ldots\beta_{2n}\ldots, \end{array} \tag{21}$$

где n пробегает все множество целых чисел. Ее элементарная ячейка содержит 4 элемента. Все остальные трансляции являются степенями рассмотренной трансляции. Ее квадрат является хронологической трансляцией в будущее. Эта хронологическая трансляция состоит из восьми циклических подстановок бесконечной длины, ее большой период равен четырем, а малый период равен двум.

Симметрией типа инверсия является счетное множество транспозиций с заменой всех элементов сорта α на элементы сорта β, всех элементов сорта β на элементы сорта α, и заменой направления отношения

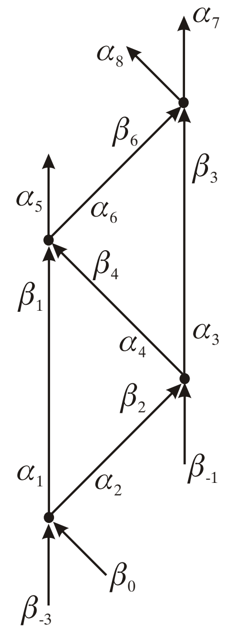

Рис. 12: Простейший идеальный динамический граф ширины 3.

непосредственного следования:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{4n+1}\beta_{-4n+1} & , \\ \beta_{4n+1}\alpha_{-4n+1} & , \\ \alpha_{-4n+3}\beta_{-4n-1} & , \\ \beta_{-4n+3}\alpha_{-4n-1} & , \\ \alpha_{-2n+4}\beta_{-2n+2} & , \\ \beta_{-2n+4}\alpha_{-2n+2} & , \end{array} \tag{22}$$

где n пробегает все множество целых чисел.

В общем случае идеальный динамический граф ширины 3 содержит кратные ребра и имеет вид последовательности конечных цепочек кратных ребер (рис. 13). Число таких цепочек может быть как конечным, так и бесконечным. У любого такого динамического графа множество элементарных преобразований симметрии включает подстановки $\boldsymbol{P}$ для каждого кратного ребра. Множество идеальных динамических графов ширины 3 взаимнооднозначно соответствует бесконечной последовательности целых чисел, где каждое следующее число равно числу кратных ребер в следующей цепочке кратных ребер, составляющих идеальный динамический граф. Идеальный динамический граф обладает теми же трансляционными симметриями, что и соответствующая ему последовательность чисел. Идеальный динамический граф имеет трансляционную симметрию, если соответствующая ему последовательность чисел периодическая. Он также может обладать симметрией типа инверсия.

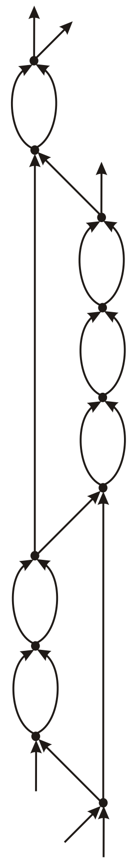

Рис. 13: Идеальный динамический граф ширины 3.

На рисунке 14 представлены простейшие идеальные динамические графы ширины 4, не содержащие кратных ребер.

Идеальные динамические графы ширины 4 и более могут быть несвязными. Существует единственный несвязный идеальный динамический граф ширины 4. Он содержит две компоненты ширины 2 (рис. 15).

Этот идеальный динамический граф дает пример преобразования симметрии, которая является произведением трансляции и конечно разложимой подстановки. Причем каждая циклическая подстановка конеч-

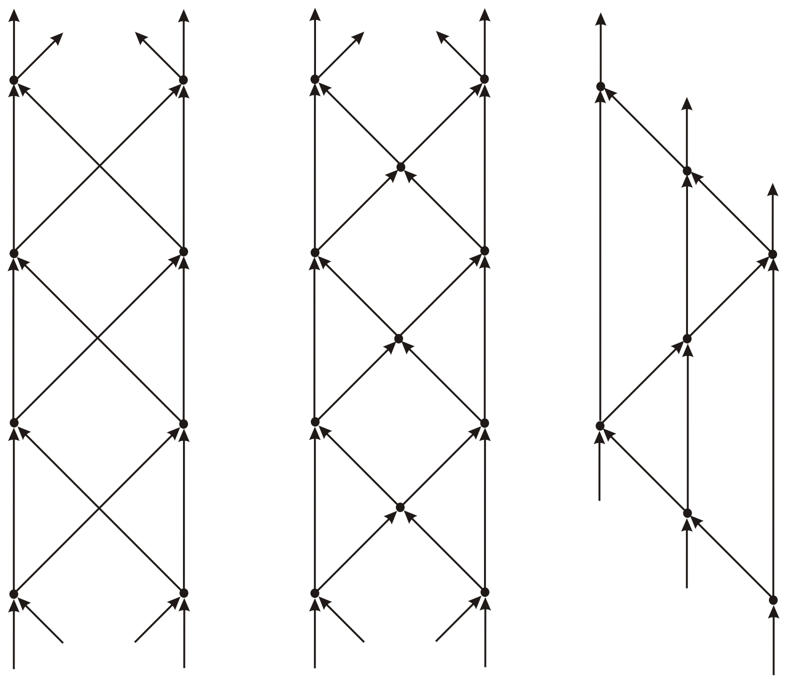

Рис. 14: Простейшие идеальные динамические графы ширины 4.

ной длины действует на элементы одной циклической подстановки бесконечной длины. Трансляция состоит из четырех циклических подстановок бесконечной длины:

$$\begin{array}{l} \ldots \alpha_1 \alpha_3 \ldots \alpha_{2n-1} \ldots, \\ \ldots \alpha_2 \alpha_4 \ldots \alpha_{2n} \ldots, \\ \ldots \beta_1 \beta_3 \ldots \beta_{2n-1} \ldots, \\ \ldots \beta_2 \beta_4 \ldots \beta_{2n} \ldots, \end{array} \tag{23}$$

где n пробегает все множество целых чисел. Конечно разложимая подстановка состоит из счетного числа транспозиций вида:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{1+4i} \alpha_{3+4i} & , \\ \alpha_{2+4i} \alpha_{4+4i} & , \\ \beta_{1+4i} \beta_{3+4i} & , \\ \beta_{2+4i} \beta_{4+4i} & , \end{array} \tag{24}$$

где i - в каждой циклической подстановке фиксировано и пробегает все множество целых чисел. Эта подстановка представляет собой замену номеров элементов первой компоненты на номера элементов второй компоненты и наоборот. Результатом произведения трансляции (23) и конечно

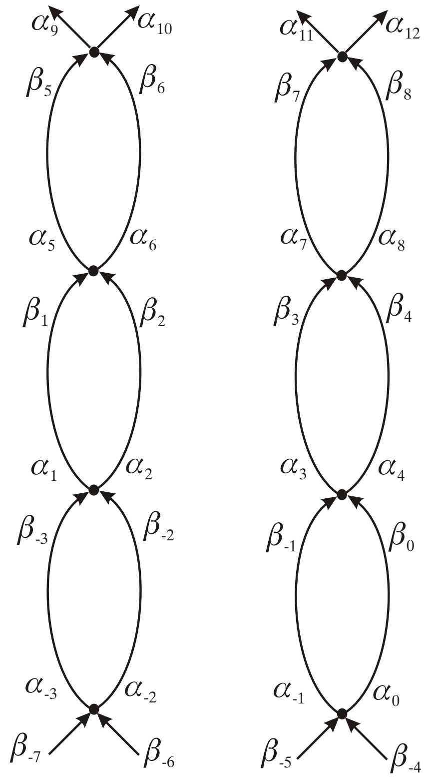

Рис. 15: Несвязный идеальный динамический граф ширины 4.

разложимой подстановки (24) является трансляция, изоморфная трансляции (23).

Представляет интерес множество трубок - идеальных динамических графов с высокой симметрией. В континуальном приближении трубки представляют собой кольцевые струны, движущиеся по мировым трубам. Пример трубки ширины 12 приведен на рисунке 16. Для наглядности, трубка изображена вложенной в трехмерное пространство. Ребра на переднем плане показаны толстыми стрелками, а на заднем плане - тонкими стрелками. На рисунке 17 показана нумерация элементов на фрагменте трубки, разрезанном вдоль и развернутом в плоскости. Элементы в области разреза показаны дважды, по обоим краям разреза. Также показаны линии сечения двумя плоскостями. Линия $3-3$ изображает поперечное сечение трубки. Линии $1-1$ и $2-2$ изображают сечение продольной плоскостью, являющейся плоскостью симметрии трубки. В нижней части рисунка показан срез трубки в плоскости $3-3$. Сечение элементов показано точками. Плоскость симметрии показана линией $1-2$.

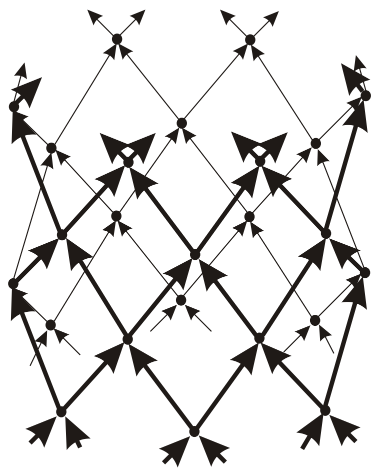

Рис. 16: Идеальный динамический граф вида «трубка» ширины 12.

Множество элементарных преобразований симметрии состоит из конечно разложимой подстановки, трансляции и инверсии. Конечно разложимая подстановка $\boldsymbol{A}$ соответствует зеркальному отражению относительно плоскости $1-2$. Она состоит из счетного множества транспозиций:

$$\begin{array}{l}
\alpha_{1+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)11)/12]}\alpha_{12+11n+12[n/12]}\quad,\\
\alpha_{2+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)10)/12]}\alpha_{11+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)1)/12]}\quad,\\
\alpha_{3+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)9)/12]}\alpha_{10+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)2)/12]}\quad,\\
\alpha_{4+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)8)/12]}\alpha_{9+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)3)/12]}\quad,\\
\alpha_{5+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)7)/12]}\alpha_{8+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)4)/12]}\quad,\\
\alpha_{6+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)6)/12]}\alpha_{7+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)5)/12]}\quad,\\
\beta_{1+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)11)/12]}\beta_{12+11n+12[n/12]}\quad,\\
\beta_{2+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)10)/12]}\beta_{11+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)1)/12]}\quad,\\
\beta_{3+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)9)/12]}\beta_{10+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)2)/12]}\quad,\\
\beta_{4+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)8)/12]}\beta_{9+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)3)/12]}\quad,\\
\beta_{5+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)7)/12]}\beta_{8+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)4)/12]}\quad,\\
\beta_{6+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)6)/12]}\beta_{7+11n+12[(n+(\operatorname{sign} n)5)/12]}\quad,
\end{array} \qquad (25)$$

где n пробегает все множество целых чисел, квадратные скобки обозначают функцию «целая часть числа» , а $\operatorname{sign} n$ обозначает функцию «знак числа n». Такое сложное выражение для индексов элементов связано с

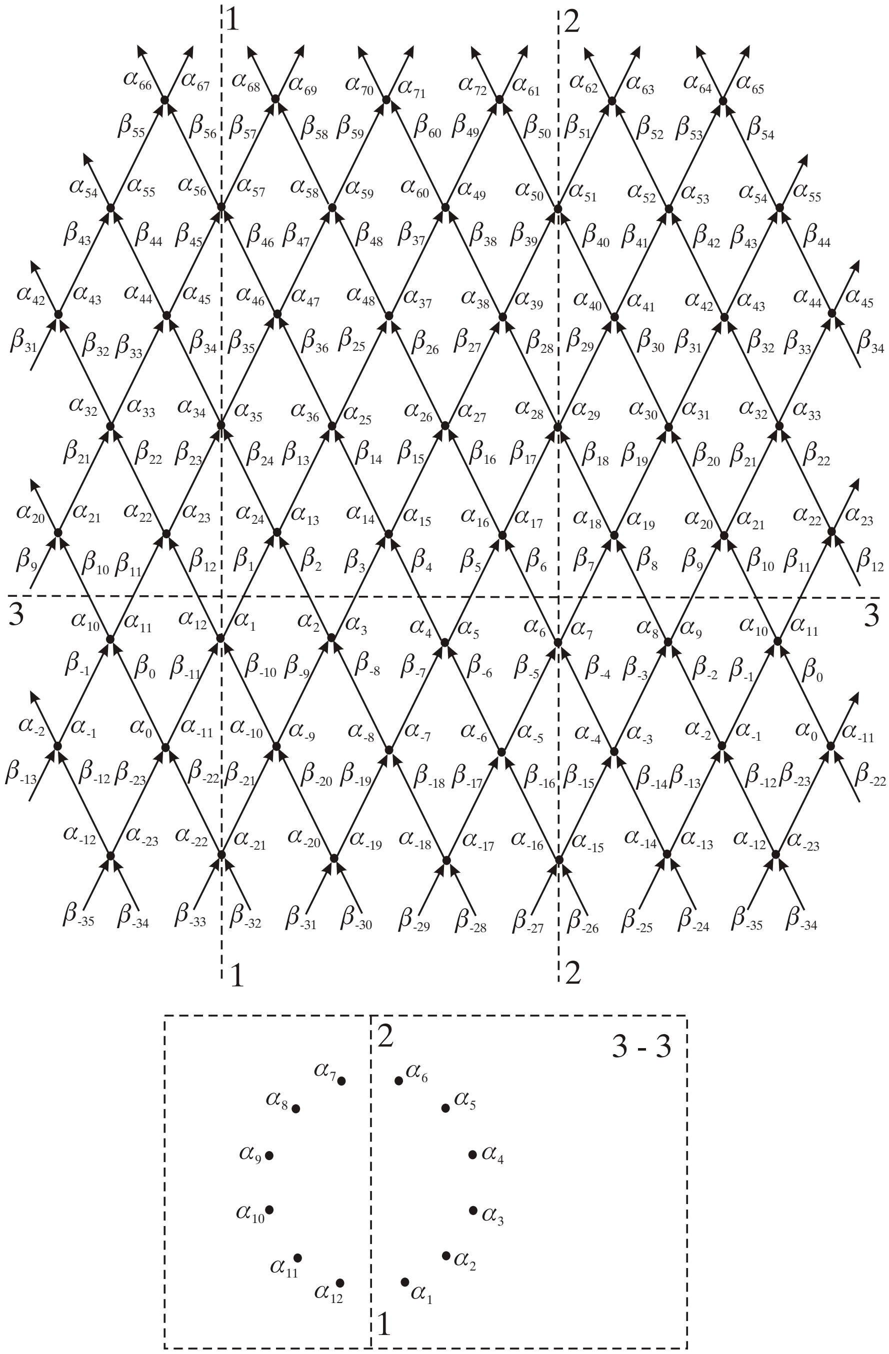

Рис. 17: Развертка в плоскости идеального динамического графа вида «трубка» ширины 12.

тем, что переход нумерации элементов с одной антицепи на другую происходит по правой винтовой линии. Отметим, что $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$.

Трансляция $\boldsymbol{B}$ представляет собой правый винтовой сдвиг и состоит из двадцати четырех циклических подстановок бесконечной длины:

$$\begin{aligned} &\ldots \alpha_i \alpha_{i+12} \ldots \alpha_{i+12n} \ldots, \\ &\ldots \beta_i \beta_{i+12} \ldots \beta_{i+12n} \ldots, \end{aligned} \tag{26}$$

где i в каждой циклической подстановке фиксировано и пробегает значения от 1 до 12, а n пробегает все множество целых чисел в каждой циклической подстановке.

Отметим, что термины «зеркальное отражение» и «винтовой сдвиг» использованы для наглядности. Преобразования симметрии трубки заданы выражениями (25) - (26) и не связаны с возможностью вложения трубки в континуальное пространство.

Инверсия $\boldsymbol{C}$ имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1+11n+12[(n/12]}\beta_{-10-11n-12[(n+1)/12]} \quad , \\
&\beta_{1+11n+12[(n/12]}\alpha_{-10-11n-12[(n+1)/12]} \quad , \\
&\alpha_{2+11n+12[(n+1)/12]}\beta_{-9-11n-12[(n+2)/12]} \quad , \\
&\beta_{2+11n+12[(n+1)/12]}\alpha_{-9-11n-12[(n+2)/12]} \quad , \\
&\alpha_{3+11n+12[(n+2)/12]}\beta_{-8-11n-12[(n+3)/12]} \quad , \\
&\beta_{3+11n+12[(n+2)/12]}\alpha_{-8-11n-12[(n+3)/12]} \quad , \\
&\alpha_{4+11n+12[(n+3)/12]}\beta_{-7-11n-12[(n+4)/12]} \quad , \\
&\beta_{4+11n+12[(n+3)/12]}\alpha_{-7-11n-12[(n+4)/12]} \quad , \\
&\alpha_{5+11n+12[(n+4)/12]}\beta_{-6-11n-12[(n+5)/12]} \quad , \\
&\beta_{5+11n+12[(n+4)/12]}\alpha_{-6-11n-12[(n+5)/12]} \quad , \\
&\alpha_{6+11n+12[(n+5)/12]}\beta_{-5-11n-12[(n+6)/12]} \quad , \\
&\beta_{6+11n+12[(n+5)/12]}\alpha_{-5-11n-12[(n+6)/12]} \quad , \\
&\alpha_{7+11n+12[(n+6)/12]}\beta_{-4-11n-12[(n+7)/12]} \quad , \\
&\beta_{7+11n+12[(n+6)/12]}\alpha_{-4-11n-12[(n+7)/12]} \quad , \\
&\alpha_{8+11n+12[(n+7)/12]}\beta_{-3-11n-12[(n+8)/12]} \quad , \\
&\beta_{8+11n+12[(n+7)/12]}\alpha_{-3-11n-12[(n+8)/12]} \quad , \\
&\alpha_{9+11n+12[(n+8)/12]}\beta_{-2-11n-12[(n+9)/12]} \quad , \\
&\beta_{9+11n+12[(n+8)/12]}\alpha_{-2-11n-12[(n+9)/12]} \quad , \\
&\alpha_{10+11n+12[(n+9)/12]}\beta_{-1-11n-12[(n+10)/12]} \quad , \\
&\beta_{10+11n+12[(n+9)/12]}\alpha_{-1-11n-12[(n+10)/12]} \quad , \\
&\alpha_{11+11n+12[(n+10)/12]}\beta_{0-11n-12[(n+11)/12]} \quad , \\
&\beta_{11+11n+12[(n+10)/12]}\alpha_{0-11n-12[(n+11)/12]} \quad , \\
&\alpha_{12+11n+12[(n+11)/12]}\beta_{1-11n-12[(n)/12]} \quad , \\
&\beta_{12+11n+12[(n+11)/12]}\alpha_{1-11n-12[(n)/12]} \quad ,
\end{aligned} \tag{27}$$

где m пробегает все множество неотрицательных целых чисел.

Остальные преобразования симметрии получаются как произведения трех указанных. Левый винтовой сдвиг является результатом последовательности преобразований $\boldsymbol{ABA}$. Симметрия, представляющая собой правый поворот трубки на 1/6 окружности, является примером конечно разложимого преобразования симметрии, полученного в результате произведения двух трансляций. Одна трансляция состоит из последовательности преобразований $\boldsymbol{BA}$. Вторая трансляция состоит из последовательности преобразований $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$. В результате поворот трубки на 1/6 окружности получается как $\boldsymbol{BAB}^{-1}\boldsymbol{A}$ и имеет вид:

$$\begin{array}{l}\alpha_{1+12n}\alpha_{3+12n}\alpha_{5+12n}\alpha_{7+12n}\alpha_{9+12n}\alpha_{11+12n} \quad ,\\ \alpha_{2+12n}\alpha_{4+12n}\alpha_{6+12n}\alpha_{8+12n}\alpha_{10+12n}\alpha_{12+12n} \quad ,\\ \beta_{1+12n}\beta_{3+12n}\beta_{5+12n}\beta_{7+12n}\beta_{9+12n}\beta_{11+12n} \quad ,\\ \beta_{2+12n}\beta_{4+12n}\beta_{6+12n}\beta_{8+12n}\beta_{10+12n}\beta_{12+12n} \quad ,\end{array} \tag{28}$$

где n в каждой циклической подстановке фиксировано и пробегает все множество целых чисел.

Для рассматриваемого связного идеального динамического графа можно привести пример трансляции, при которой образ антицепи содержит как элементы, лежащие в прошлом, так и в будущем антицепи прообраза. Антицепь прообраз A_1 состоит из элементов α_{-19}, α_{-18}, α_{-9}, α_{-6}, α_1, α_6, α_{18}, α_{23}, α_{30}, α_{33}, α_{42} и α_{43}. Антицепь образ A_2 состоит из элементов α_{10}, α_9, α_{22}, α_{19}, α_{34}, α_{29}, α_{39}, α_{46}, α_{49}, α_{58}, α_{71} и α_{70}. Порядок перечисления элементов A_1 и A_2 выбран так, что элемент образ стоит на том же месте, что и элемент прообраз. Трансляция $\boldsymbol{T}$, переводящая A_1 в A_2, является произведением правой винтовой трансляции $\boldsymbol{B}$, левой винтовой трансляции $\boldsymbol{ABA}$ и зеркального отражения $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{AABAB}$. Учитывая, что $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, получаем $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{BAB}$.

Трубки с указанными симметриями могут быть только четной ширины, так у них имеются полные антицепи, которые состоят только из пар смежных элементов. Иные идеальные динамические графы, имеющие форму трубки, имеют более сложную структуру.

5.7 Физическая интерпретация структур

Предполагается, что рассмотренные идеальные динамические графы являются прообразами элементарных частиц. Частицами их можно будет назвать, когда масса, спин, заряды и другие характеристики частиц будут идентифицированы с различными характеристиками идеальных динамических графов, а сами идеальные динамические графы - с идеальными моделями определенных частиц.

Частицы являются периодическими структурами - тем самым они являются часами. Период хронологической трансляции является естественной единицей времени частицы. Период трансляции должен соответствовать периоду де Бройля. Исходя из собственных свойств частицы, период полураспада надо выразить в ее периодах трансляции. В дискретной динамике период полураспада - это среднее число повторов элементарной ячейки.

Структуры ширины не менее 4 могут описывать рассеяние. На рисунке 18 изображена структура ширины 6. Для этой структуры характерно, что существует полная антицепь такая, что элементы, предшествующие ей, образуют две несвязные структуры ширины 3 (обозначенная на рисунке антицепь β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 и β_6). Также существует полная антицепь такая, что элементы, последующие ей, образуют две несвязные структуры ширины 3 (обозначенная на рисунке антицепь α_1, α_2, α_3, α_4, α_5 и α_6). Эту структуру можно интерпретировать как упругое рассеяние одной структуры ширины 3 на другой. Элементы, последующие какому-либо элементу первой антицепи и предшествующие какому-либо элементу второй антицепи, можно интерпретировать как область взаимодействия структур ширины 3.

Реальные физические процессы не могут описываться идеальными динамическими графами. Онм описываются динамическими графами, которые в общем случае не обладают симметриями. Однако, конечные динамические графы, описывающие физические процессы, могут обладать приближенными симметриями. Приближенным преобразованием симметрии типа подстановки динамического графа назовем подстановку, при которой некоторое подмножество элементов образов находится между собой в тех же отношениях частичного упорядочения, что и их элементы прообразы. Аналогично приближенным преобразованием симметрии типа инверсия динамического графа назовем преобразование инверсии, при которой некоторое подмножество элементов образов находится между собой в тех же отношениях частичного упорядочения, что и их элементы прообразы.

Простейшим примером структуры с приближенными симметриями является произвольная х-структура ($[\beta_1\ \beta_2][\alpha_1\ \alpha_2]$) в произвольном непустом динамическом графе. Она симметрична относительно перестановки элементов сорта β и аналогично элементов сорта α. Она обладает двумя симметриями типа инверсия:

$$\begin{array}{l}\alpha_1\beta_1,\\ \alpha_2\beta_2\end{array} \tag{29}$$

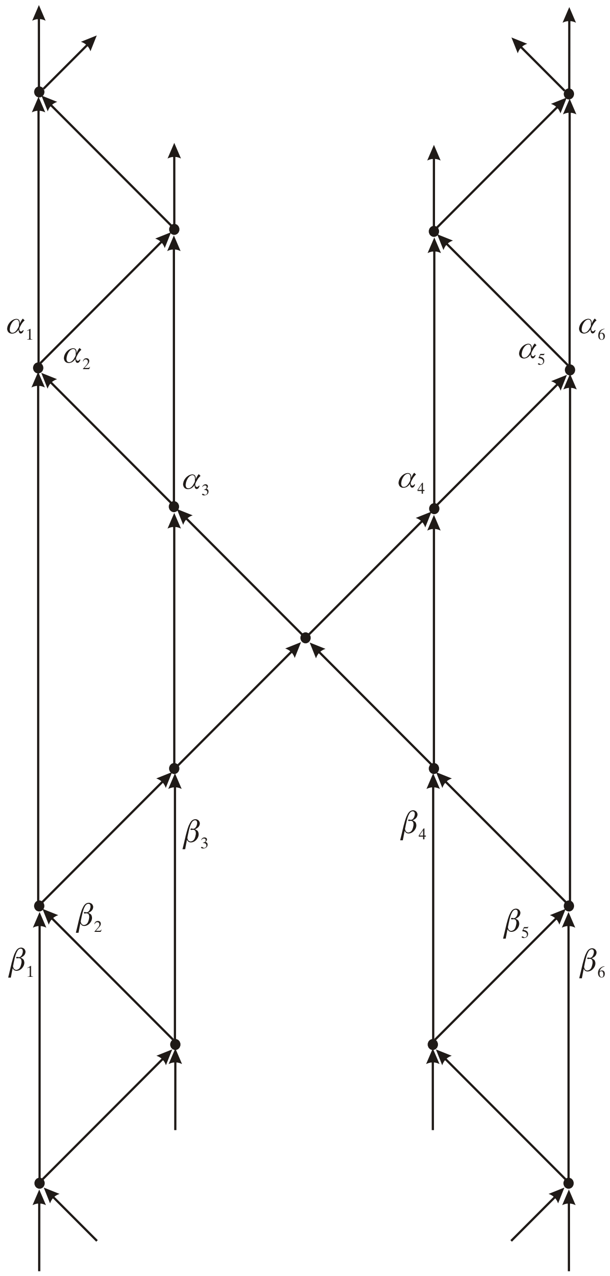

Рис. 18: Идеальный динамический граф вида «упругое рассеяние» ширины 6.

и

$$\begin{aligned} &\alpha_1\beta_2, \\ &\alpha_2\beta_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Это внутренние симметрииии x-структуры. Также x-структура симметрична относительно любой другой x-структуры. Если элементы одной x-структуры не связаны отношением частичного упорядочения с элементами другой x-структуры, то они симметричны относительно подстановки, меняющей номера элементов одной x-структуры на номера элементов другой x-структуры и наоборот. Если некоторые элементы первой x-структуры связаны отношением частичного упорядочения с некоторыми элементами второй x-структуры, и элементы второй x-структуры связаны таким же отношением частичного упорядочения с элементами третьей x-структуры, то между этими x-структурами имеется трансляционная симметрия, которая переводит первую x-структуру во вторую, а вторую в третью.

Именно обладающие приближенными симметриями элементы структур динамических графов должны соответствовать реальным квантовым объектам. Какие из этих объектов фактически реализуются должно определяться динамикой.

6 Принципы динамики

6.1 Субъективная динамика и вероятности структур

Выше получена статическая модель. Рассмотрим теперь динамику.

Поскольку все прошлое и будущее Вселенной считается однозначно фиксированным, «существующим», то отсутствует объективная динамика, как объективное возникновение одних явлений из других. Если бы можно было знать структуру всей Вселенной, то отпала бы необходимость в динамике. Можно было бы просто посмотреть структуру любого интересующего нас явления. Однако, возможна субъективная динамика. Наблюдатель принципиально может обладать только конечным объемом информации, то есть знать структуру конечной области Вселенной. Субъективная динамика заключается в прогнозировании наблюдателем структуры неизвестных ему областей Вселенной. В концепции «существующего» прошлого и будущего субъективный характер имеет любая динамика. В частности, субъективный характер имеет дискретная динамика. Причем в дискретной динамике, как у теории первоэлементов, субъективный характер проявляется наиболее явно.

Дискретная динамика является стохастической динамикой. Наблюдатель, обладая конечным объемом информации, в общем случае может делать только вероятностные суждения о неизвестных ему участках динамического графа Вселенной. С одной стороны вероятности в дискретной динамике носят субъективный характер, так как являются мерой информированности наблюдателя. Но с другой стороны, вероятности описывают свойства динамического графа Вселенной, так как они описываю частоту, с которой встречаются те, или иные структуры.

Рассмотрим большой связный динамический граф. Для заданного числа N его можно разбить на различные связные динамические подграфы, содержащие N х-структур. Рассмотрим все возможные разбиения и сосчитаем число N_1 различных связных динамических подграфов, состоящих из N х-структур. При этом будем учитывать только структуры, различающиеся хотя бы на одну х-структуру, тождественно совпадающие динамические подграфы из различных разбиений будем учитывать один раз. Рассмотрим некоторую структуру S, состоящую из N х-структур. Сосчитаем число N_2 различных динамических подграфов, имеющих выбранную структуру S. Рассмотрим долю динамических подграфов, содержащих N х-структур и имеющих выбранную структуру S. Она равна N_2/N_1. Вероятностью того, что случайно выбранный динамический подграф, содержащий N х-структур, имеет структуру S, равна пределу, к которому стремиться отношение N_2/N_1 при неограниченном увеличении исходного динамического графа. Реальное определение предела невозможно, и под вероятностью полагается отношение вида N_2/N_1 в достаточно большом динамическом графе. Описанное построение является определением понятия «случайно выбранный динамический подграф, содержащий N х-структур». Другое построение является другим определением случайного выбора, которое в общем случае может не совпадать с рассмотренным.

Приведенное определение конкретизирует понятия испытания, серии испытаний, случайного исхода в дискретной динамике. Наблюдаемой в дискретной динамике является структура динамического графа. Предполагается, что наблюдатель может в принципе точно установить структуру любого конечного динамического подграфа в динамическом графе Вселенной. Испытанием или измерением является процесс установления структуры. Серией испытаний является последовательное измерение структуры динамических подграфов, случайно выбранных в исследуемом динамическом графе. Исходом является измеренная структура динамического подграфа. Возможность выбрать структуру, состоящую из заданного числа х-структур не принципиальна. Можно измерять динамические подграфы случайного размера, и результаты пересчитывать по правилам элементарной теории вероятностей.

Одни меньшие структуры являются составными частями более крупных структур. Поэтому вероятности структур не являются независимыми и коррелируют. Рассмотрим корреляции структур динамических подграфов. Пусть есть структура A. Она иногда является частью большей структуры B, а иногда нет. При этом в рассматриваемом динамическом графе G отношение числа случаев, когда A является частью B, к общему количеству структур A равно $P(B \mid A)$. В этом случае, если мы наблюдаем динамический подграф, имеющий структуру A, то, обследуя область динамического графа, содержащую структуру A, мы с вероятностью $P(B \mid A)$ обнаружим, что она имеет структуру B. Если эта условная вероятность отлична от вероятности случайного выбора динамического подгафа, имеющего структуру B, то структуры A и B коррелируют.

Отметим, что A не является причиной в общепринятом смысле этого слова. Правильно говорить о корреляциях A и B. Динамические подграфы с коррелированными структурами могут иметь любой порядок в смысле частичной упорядоченности. В частном случае ни один элемент одной структуры может не состоять в отношении частичной упорядоченности с ни с одним элементом другой структуры, и в континуальном пределе эти структуры могут быть разделены пространственноподобным интервалом. Корреляция структур не означает наличие сигналов между этими структурами. Получение информации о любом динамическом подграфе изменяет вероятности наблюдения всех других структур в окружающем, сколь угодно большом динамическом графе. Корреляция событий во Вселенной носит глобальный характер. Это можно пояснить на простом примере. Например, если мы возьмем две карты черную и белую и, не глядя, одну отправим в удаленную точку, то вероятность, что удаленная карта будет черной равна $1/2$. Если мы посмотрим на оставшуюся карту, то произойдет мгновенный коллапс вероятности сколь угодно удаленной карты к 0 или 1. В терминах дискретной механики мгновенный коллапс происходит в субъективном времени наблюдателя. Вероятности описывают не само событие, а мнение наблюдателя о событии, степень его информированности. Единичное событие или происходит, или не происходит. Вероятности описывают ансамбли событий, а рассматриваемый ансамбль отражает информированность наблюдателя. Вероятность есть отношение числа искомых событий к общему числу событий в ансамбле. При получении новой информации вероятность изменяется, так как наблюдатель меняет свое мнение о возможных событиях, то есть начинает рассматривать другой ансамбль. При этом нет различия между анализом уже произошедших событий, или событий, которые только могут произойти. Например, вероятность выпадения одной из граней правильной игральной кости равна одной шестой независимо от того, рассматриваем мы эксперимент по бросанию кости, который уже произошел, или который мы только собираемся выполнить. Важно, что у нас нет информации о результате эксперимента.

6.2 Последовательный рост

Задача дискретной динамики формулируется следующим образом. Задана структура конечного связного динамического графа, содержащего $4n$ элементов. Требуется определить структуру фрагмента динамического графа из $4m$ элементов, соседнего к заданному динамическому графу. Фрагмент, соседний к заданному динамическому графу означает, что заданный динамический граф и новый фрагмент образуют связный динамический граф. То, что структура задана, означает, что имеется наблюдатель, внешний по отношению к структуре, который обладает полной информацией о структуре. Внешний по отношению к структуре наблюдатель - это наблюдатель, любая составная часть которого не является частью рассматриваемой структуры. Условие связности динамического графа существенно. Если задан несвязный динамический граф, то есть состоящий из нескольких связных динамических подграфов, и нет никакой информации о расстоянии между ними, то динамика этих динамических подграфов независима. На динамике динамического графа никак не сказывается информация о наличии где-то во Вселенной других динамических графов с определенной структурой.

Предполагается, что в общем случае структура соседней области не может быть определена однозначно. В противном случае можно было бы определить структуру всей Вселенной. Наблюдатель может только вычислять вероятности различных вариантов структуры фрагментов динамического графа, соседних с известным динамическим графом.

Предполагается, что задача может быть решена последовательно. Согласно теореме 2 процесс синтеза любого динамического графа может быть представлен, как последовательное добавление к имеющемуся динамическому графу по одной x-структуре на каждом шаге. Идея динамики графа, как последовательного добавления новых вершин и ребер, предложена в работе [36] и развита в последующих работах [37, 38, 39, 40]. В работе [20] Райдот и Соркин предложили для динамики такого типа термин «динамика последовательного роста». Отметим, что в работе [20] предлагается вариант динамики последовательного роста причинностного множества, интерпретируемый авторами в терминах объективной динамики возникающего будущего.

Предлагаемая динамика напоминает стирание пыли с картины. Археолог очистил часть древней мозаики. По имеющемуся изображению он может строить предположения о еще скрытых частях. Эти части существуют, но они скрыты от исследователя. Реально расширяя очищенную часть мозаики, археолог может проверить правильность своих предположений.

Отметим, что в субъективной динамике естественным образом возникает два времени. Одно время - это время объекта, то есть частичное упорядочение событий (х-структур) в объекте. Время объекта - это локальная переменная. Другое время - это субъективное время наблюдателя. Наблюдатель рассматривается, как устройство, последовательно обрабатывающее информацию. Субъективное время наблюдателя - это линейно упорядоченная последовательность поступления информационных сообщений о добавлении очередной х-структуры к известному динамическому графу. Для фиксированного наблюдателя оно едино для всей Вселенной - это глобальный внешний параметр. Субъективное время параметризуется номером шага, на котором добавлена очередная х-структура. Именно в субъективном времени происходит коллапс вероятности.

6.3 Вероятности элементарных продолжений

Последовательный рост динамического графа представляет собой случайную последовательность, и вероятность искомой структуры может быть вычислена, как вероятность последовательности случайных событий. Пусть задана структура динамического графа G_0, содержащего N_0 х-структур. Требуется рассчитать вероятность $P(S \mid G_0)$ того, что динамический граф G_n имеет структуру S, при условии, что G_n содержит N_n х-структур, где $N_n = N_0 + n$, и включает динамический граф G_0.

Рассмотрим всевозможные динамические графы, получаемые из динамического графа G_0 добавлением одной х-структуры. Вычислим вероятность каждой полученной структуры $S^i(N_0 + 1)$. К каждому новому динамическому графу G_1^i, содержащему $N_0 + 1$ х-структур, добавим еще одну х-структуру и повторим процедуру вычисления вероятностей. Вероятность получения каждой структуры $S^j(N_0 + 2)$, содержащей $N_0 + 2$ х-структур, равна произведению вероятности ее получения из структуры $S^i(N_0 + 1)$, содержащей $N_0 + 1$ х-структур, на вероятность получения структуры $S^i(N_0 + 1)$ из исходного динамического графа G_0. Если существует несколько вариантов получения одной и той же структуры, то вероятность получения этой структуры равна сумме вероятностей всех вариантов. При последовательном повторении процесса добавления по одной х-структуре, на некотором шаге получаются все структуры, содержащие N_n х-структур, которые могут быть получены из исходного динамического графа G_0, и вычисляются их вероятности. Если среди них есть искомая структура, то задача решена, если нет, то динамический граф с искомой структурой не может включать исходный динамический граф G_0, то есть вероятность динамическому графу G_n иметь структуру S равна нулю. В результате получаем:

$$P(S \mid G_0) = \textstyle\sum_i \sum_j \cdots \sum_k P^{ij\ldots k}(G_0 \to S), \tag{31}$$

где суммирование проводится $n-1$ раз. Величины $P^{ij\ldots k}(G_0 \to S)$ представляют собой произведения n сомножителей:

$$\begin{aligned} P^{ij\ldots k}(G_0 \to S) = P(S^i(N_0+1) \mid G_0)P(S^j(N_0+2) \mid S^i(N_0+1))\ldots \\ \ldots P(S \mid S^k(N_0+n-1)), \end{aligned}$$

где $P(S^j(N_0+2) \mid S^i(N_0+1))$ есть вероятность получения структуры $S^j(N_0+2)$ из структуры $S^i(N_0+1)$ с помощью случайного добавления одной х-структуры. Индексы $i, j \ldots k$ нумеруют все структуры, состоящие из заданного числа х-структур. Большинство таких сомножителей равно нулю. Вероятность $P^{ij\ldots k}(G_0 \to S)$ представляет собой вероятность получения определенной последовательности добавлений х-структур к динамическому графу G_0, которая приводит к структуре S. Поскольку по условию задачи рассматривается случай добавления n х-структур, то каждая вероятность вида $P^{ij\ldots k}(G_0 \to S)$ содержит n сомножителей. Итоговая вероятность $P(S \mid G_0)$ получается суммированием всех таких альтернативных последовательностей.

Задача вычисления вероятностей произвольных структур сведена к задаче вычисления вероятностей элементарных продолжений, которые представляют собой прибавление одиночных х-структур к динамическому графу заданной структуры. Правила вычисления вероятностей элементарных продолжений являются предметом дальнейших исследований. Согласно гипотезе, рассмотренной в разделе 3.8, вероятности элементарных продолжений в свою очередь, возможно, могут быть сведены к бинарным альтернативам.

Отметим, что описанная динамика последовательного роста предполагает, что в принципе структура динамического графа может быть экспериментально определена (измерена) на каждом шаге. Таким образом, возникает понятие элементарного измерения. Оно заключается в добавлении к исходному динамическому графу, структура которого известна, одной х-структуры и определения места ее присоединения.

7 Заключение

В настоящей работе рассмотрены принципы, на которых может быть построена «теория всего», названная дискретной механикой. На их основе предложена конкретная модель и исследованы ее свойства. Ближайшей задачей дискретной механики является определение закона вычисления элементарных продолжений, что завершит построение исходных принципов дискретной динамики.

Следующей задачей является построение спектра элементарных частиц. Предполагается, что теория элементарных частиц, включающая их классификацию и вероятности реакций, может быть построена на языке характеристик динамических графов без введения пространства-времени. Указанием на эту возможность является предпочтительность импульсного представления вместо координатного в квантовой теории поля.

Более сложной задачей является построение предельного перехода к континуальному пространству-времени, поскольку оно является эффектом коллективного поведения больших количеств микрообъектов. На этом пути представляется перспективным подход хроногеометрии. Наиболее сложным является вопрос о механизме возникновения размерности $3 + 1$.

После построения пространства-времени будет возможно исследовать связь с существующей квантовой физикой. Возможно, квантовая теория поля - это дискретная динамика элементарных частиц, переформулированная в терминах пространства-времени. Перечисленный список проблем охватывает непосредственную область применения дискретной механики - физику микромира, то есть локальные свойства Вселенной. Другим направлением является исследование глобальных свойств Вселенной с позиций дискретной механики.

Если дискретная механика претендует на роль «теории всего», то в ее рамках должна быть решена задача построения стрелы времени. Для решения этой задачи, вероятно, потребуется разработка информационного анализа динамических графов. Поскольку получение информации тесно связано с понятием наблюдателя, на этом пути возможен переход от внешнего наблюдателя, к наблюдателю, как составной части динамического графа.

Автор выражает свою благодарность А.В. Коганову и В.В. Кассандрову за плодотворные дискуссии, стимулировавшие написание настоящей работы.

Список литературы

[1] Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация, т. 3. - Бишкек: Айнштайн, 1997. - 510 с.

[2] Эйнштейн А. Цитируется по книге: Кузнецов Б.Г. Эйнштейн: Жизнь. Смерть. Бессмертие. - М.: Наука, 1980. - 672 с.

[3] Брайан Г. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной теории. - М.: Едиториал УРСС, 2005. - 288 с.

[4] Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. - М.: Изд-во московского университета, 1988. - 112 с.

[5] Бурбаки Н. Очерки по истории математики. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. - 292 с.

[6] Уайтхед А. Наука и современный мир// Избранные работы по философии. - М.: Прогресс, 1990. - с. 56 - 272.

[7] Mach E. Fichtes Zeitschrift für Philosophie. -1866. - 49. - s. 227.

[8] Оре О. Теория графов. - М.: Наука, 1980. - 336 с.

[9] Аристотель. Метафизика. Сочинения в четырех томах. Т. 1. - М.: Мысль, 1976. - 550 с.

[10] Эйнштейн А. Сущность теории относительности. Лекция 2. Специальная теория относительности//Собрание научных трудов. Т. 2. Работы по теории относительности 1921 - 1955. - М.: Наука, 1966. - с. 5 - 82.

[11] Владимиров Ю.С. Аксиоматизация свойств пространства-времени общей теории относительности// Сборник. Современные проблемы гравитации. - Тбилиси: Изд-во Тб.ГУ, 1967. - с. 407-412.

[12] Пименов Р.И. Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени). Л.: Наука, 1968, 496 с.

[13] Castagnino M. A. The Riemann structure of space-time as a consequence of a masurement method// Journal of Mathematical Physics. - 1971. - 12. pp. 2203 - 2211.

[14] Enosh M., Kovetz A. Characterization of gravitational theories by cumulative effects in free particles' motion and behaviour of clocks// Annals of Physics. - 1971. - 69. pp. 279 - 296.

[15] Ehlers, J., Pirani, A.E., and Schild, A. The geometry of free fall and light propagation// General relativity. Papers in honour of J.L. Synge. Ed. by L. O'Raifeartaigh. - Oxford: Clarendon press, 1972. - pp. 63 - 84.

[16] Бурбаки Н. Архитектура математики// Очерки по истории математики. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. - с. 245 - 259.

[17] Myrheim, J. Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538. - 1978. - 13 p.

[18] Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D. and Sorkin, R.D. Space-time as a causal set// Physical Review Letters. - 1987. - 59. - pp. 521 - 524.

[19] Sorkin, R. D. Spacetime and causal set// Relativity and Gravitation: Classical and Quantum. Proceedings of the SILARG VII Conference: Cocoyoc, Mexico, December, 1990. Ed. by D'Olivo, J.C., Nahmad-Achar, E., Rosenbaum, M., Ryan, M., Urrutia, L. and Zertuche, F. - 1991. - pp. 150 - 173.

[20] Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets// Physical Review. - 2000. - D61. - pp. 024002-1 - 024002-16. (e-print archive: gr-qc/9904062).

[21] Дойч Д. Структура реальности. - Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001. - 400 с.

[22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 3. Квантовая механика (нерелятивистская теория). - 4-е изд. испр. - М.: Наука, 1989. - 768 с.

[23] Синг Дж. Общая теория относительности. - М.: ИЛ, 1963. - 432 с.

[24] де Бройль Л. Соотношение неопределенностей Гайзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики. (С критическими замечаниями автора.) Предисловие и дополняющие замечания Ж. Лошака. - М.: Мир, 1986. - 344 с.

[25] Эйнштейн А. Эволюция физики. В кн. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 4. Статьи, рецензии, письма. Эволюция физики. - М.: Наука, 1967. - с. 357 - 543.

[26] Эйнштейн А. О специальной и общей теории относительности. В кн. Альберт Эйнштейн. Собрание научных трудов. Т. 1. Работы по теории относительности 1905 - 1920. - М.: Наука, 1965. - с. 530 - 600.

[27] Эйнштейн А. Фундаментальные понятия физики и изменения, которые произошли в них за последнее время.// Собрание научных трудов. Т. 4. Статьи, рецензии, письма. Эволюция физики. - М.: Наука, 1967. - с. 103 - 108.

[28] Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. - М.: Мир, 1989. - 540 с.

[29] Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. - М.: Наука, 1974. - 119 с.

[30] Werner F.G., remark to J.A. Wheeler on June 3 at the Cincinnati, Ohio, Relativity Conference in the Midwest, 1969.

[31] Finkelstein, D. and McCollum, G. Unified quantum theory// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.1/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen, Wienna: Hauser, 1975. - pp. 15 - 54.

[32] von Weizsäcker, C. F. The philosophy of alternatives// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.1/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen, Wienna: Hauser, 1975. - pp. 213 - 230.

[33] Finkelstein, D. and McCollum, G. Concept of particle in quantum mechanics// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1977. - pp. 46 - 85.

[34] von Weizsäcker C. F. Binary alternatives and space-time structure// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1977. - pp. 86 - 112.

[35] von Weizsäcker C. F. A reconstruction of quantum theory// Quantum theory and the structures of time and space. Vol.2/ Ed. by Castell, L., Drieschner, M., and von Weizsäcker, C. F. - Münhen: Hauser, 1979. - pp. 7 - 35.

[36] Круглый А.Л. Модель дискретного пространства-времени. - М.: Монолог, 1998. - 56 с.

[37] Круглый А.Л. Модель динамики дискретного пространства-времени. - М.: Монолог, 2000. - 88 с.

[38] Krugly, A.L. Discrete space-time// International Journal of Theoretical Physics. - 2000. - 39(4). - pp. 975 - 984.

[39] Krugly, A.L. Causal set dynamics and elementary particles// International Journal of Theoretical Physics. - 2002. - 41(1). - pp. 1 - 37.

[40] Круглый А.Л. Динамика ориентированного графа в модели Соркина - Финкельштейна. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. - М.: Российский университет дружбы народов, 2004. - 106 с. 40.

[41] Finkelstein, D. "Superconducting"causal net// International Journal of Theoretical Physics. - 1988. - 27. - pp. 473 - 519.

[42] Finkelstein, D. Space-time code. II// Physical Review. - 1972. - D5. - pp. 320 - 328.

[43] Владимиров Ю.С. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1. Теория систем отношений. - М.: Изд-во МГУ, 1996. - 262 с.

[44] Major S., Rideout D., Surya S. Spatial Hypersurfaces in Causal Set Cosmology// e-print archive: gr-qc/0506133 v 1. - 2005. - 14 p.

[45] Фрид Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру. - М.: Мир, 1979. - 260 с.

[46] Сиротин Ю.И. Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. - 2-е изд. - М.: Наука, 1979 - 640 с.

Abstract

Principles of discrete mechanics of a microcosm.

Krugly A.L.

The base principles are considered. A model of a pregeometry is developed. This is the advanced model of casual set. Properties of the model are considered. Principles of the stochastic dynamics are discussed.