

**УДК 514.8,519.1,519.2, 530.1,539**

### **АЛГОРИТМ РОСТА X-ГРАФА И ПРИНЦИПЫ ФИЗИКИ**

А. В. Коганов, к. ф.-м. н., А. Л. Круглый, к. ф.-м. н., (Научно-исследовательский институт системных исследований РАН (НИИСИ РАН), Москва, Россия, koganow@niisi.msk.ru)

Работа посвящена современному направлению, лежащему на стыке теории автоматов и алгоритмов, теории графов, а также математической физики. В последние годы развивается теория растущих X-графов, которые каждой своей точкой (X-элементом) моделируют элементарное взаимодействие двух исходных частиц с рождением двух результирующих частиц. Рост такого графа моделирует получение наблюдателем информации о происходящих в его пространственно-временной окрестности физических процессах. Рассматривается алгоритм поэтапного формирования X-графа, удовлетворяющий ряду требований, необходимых для модели дискретного пространства-времени в квантовой физике. Особое внимание уделено выполнению принципа причинности для алгоритма, что делает корректной его интерпретацию как модели наблюдателя за физическим процессом. Новый алгоритм обладает полезными свойствами, которых не было в ранее предлагавшихся аналогичных алгоритмах. Главным из них является независимость вероятности достройки множества причинно несвязанных попарно вершин от порядка введения этих вершин. В основе алгоритма лежит новый способ выбора ребер для пристройки нового X-элемента. Это делается с помощью случайных путей до границы от случайно выбранной вершины из числа уже имеющихся в графе. Алгоритм интересен с точки зрения теории самоорганизации сложных растущих систем. Его модификации и вариации начальных состояний позволяют строить модели различных систем парных взаимодействий.

Ориентированный граф, пространство-время, растущий граф, принцип причинности, случайный алгоритм.

**UDK 514.8,519.1,519.2, 530.1,539**

### **Algorithm of X-Graph growth and Physic principles**

A. V. Koganov, Ph.d, A. L. Krugly, Ph.d, , (Science Research Institute of System Analysis of RAS (SRISA RAS) Moscow, Russia, koganow@niisi.msk.ru)

That work dedicated modern direct which locates on boundary of automat theory, algorithm theory, graph theory and mathematical physics. In last time the theory of growth X-graphs develops. That graph by every vertex (X-element) simulates elementary interaction of two initial particles with birth two resulting particles. The growth of those graph simulated the getting by observer the information about events which occurred in his space-time environment. It considered the algorithm for graph forming by stages which satisfied a number of necessary demands for Model of discrete space-time in quantum

physics. Special attention spared execution of Causality principle for algorithm. Those principle maids correct interpretation of algorithm as model of observer for physical process. New algorithm has the anything using properties which are not in early offered analogical algorithms. General property is independence of probability of set new vertexes, which are causality disconnected reciprocal, from order of theirs introduction. The base of algorithm is new mode of oriented edge choice for new X-element building. That realized with help of randomizing path from random choosing vertex which exist in graph to graph boundary. Its modification and init state variation permit to build the models of any pair interactions.

Oriented graph, space-time, increasing graph, causality principle, randomize algorithm.

## **1. Введение**

В данной работе будет описан новый алгоритм порождения графа, который по многим своим свойствам может рассматриваться как модель дискретного физического пространства-времени и процессов на этом пространстве. Попытки моделирования пространства-времени в микромире различными дискретными структурами многократно предпринимались в течение двадцатого века с целью распространения квантовых свойств на пространство и/или время, так как в квантовой механике и квантовой теории поля пространство-время остается классическим. Подробный обзор работ до шестидесятых годов двадцатого века содержится в монографии Вяльцева [1]. Использовались и различные модели графов, например, в моделях спиновых сетей (spin net) или спиновой пены (spin foam). Модель локально конечного частично упорядоченного множества предложена в работах [2,3] Эта модель может быть представлена ориентированным ациклическим графом. Ацикличность графа является моделью принципа причинности и необратимости времени в физическом пространстве-времени.

В работах [4,5] рассмотрена модель стохастического роста ориентированного ациклического графа, который строится из стандартных элементов, содержащих одну вершину, два входных и два выходных ребра (X-элемент). При этом вероятности различных вариантов роста определяются структурой графа. Такие графы далее будут называться X-графами. Поскольку при ориентированном движении по такому графу в каждой вершине имеется два альтернативных продолжения пути, такие графы иногда будут называться бинарными. Предложенный алгоритм роста обладает рядом интересных с точки зрения физических аналогий свойств, которые исследовались в указанных работах. В настоящей работе рассматривается вариант этого алгоритма, обладающий дополнительными интересными свойствами. Необходимые сведения по теории вероятности можно получить, например, из [8].

## **2. Общее понятие бинарного графа.**

Рассмотрим ориентированный ациклический бинарный граф. Ориентированный граф - это граф, все ребра которого имеют ориентацию. На рисунках такие ребра изображаются стрелками. Бинарный граф — это граф, у которого каждая вершина инцидентна двум входящим и двум выходящим ребрам. На рисунке 1 изображена одна вершина с инцидентными ей ребрами. Ациклический граф — это граф, который не содержит ориентированных циклов. Ниже будут рассматриваться только такие графы, поэтому для краткости будет использоваться термин граф или X-граф. Минимальный X-граф изображён на рисунке 1, он называется X-элемент. Предполагается, что вершины и ребра не имеют внутренних свойств, и все свойства модели определяются только топологией графа.

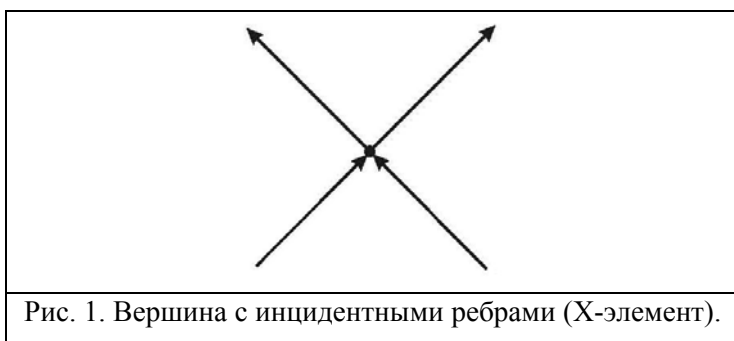


Рис. 1. Вершина с инцидентными ребрами (X-элемент).

Рассматриваются только конечные графы. В теории графов ребро — это бинарное отношение вершин. Очевидно, что в силу ацикличности часть вершин конечного графа будет иметь меньше чем четыре инцидентных ребра. Свободные валентности — это места для ребер, к которым присоединяются новые вершины в процессе роста графа. Формально, валентность можно рассмотреть как ребро, у которого одна вершина актуально существует, а другая потенциально возможна, но не включена в состав вершин графа. Далее, когда это будет удобно, свободные валентности будут называться также внешними ребрами. На рисунках они изображаются как ребра или стрелки, которые инцидентны только одной вершине. Очевидно, что внешние ребра могут быть входящими или выходящими. Если вершину на рисунке 1 рассматривать как граф, то все изображенные ребра являются внешними (четыре свободные валентности, две входящие и две выходящие). В работе [6] показано, что число входящих внешних ребер для любого рассматриваемого графа равно числу выходящих внешних ребер. Ниже это число будем называть шириной графа.

Модель на любом этапе построения дает X-граф, который является частным случаем локально конечного частично упорядоченного множества.

Если граф рассматривается как модель некоторого процесса, то направление по ориентации ребер может интерпретироваться как направление времени, или причинно-следственных связей, то есть направление по ориентации – это направление в будущее, а направление против ориентации – это направление в прошлое.

### 3. Последовательный рост

Последовательный рост графа заключается в последовательном добавлении вершин по одной к исходно заданному графу. Добавление одной вершины называется элементарным продолжением. Имеется четыре вида элементарных продолжений.

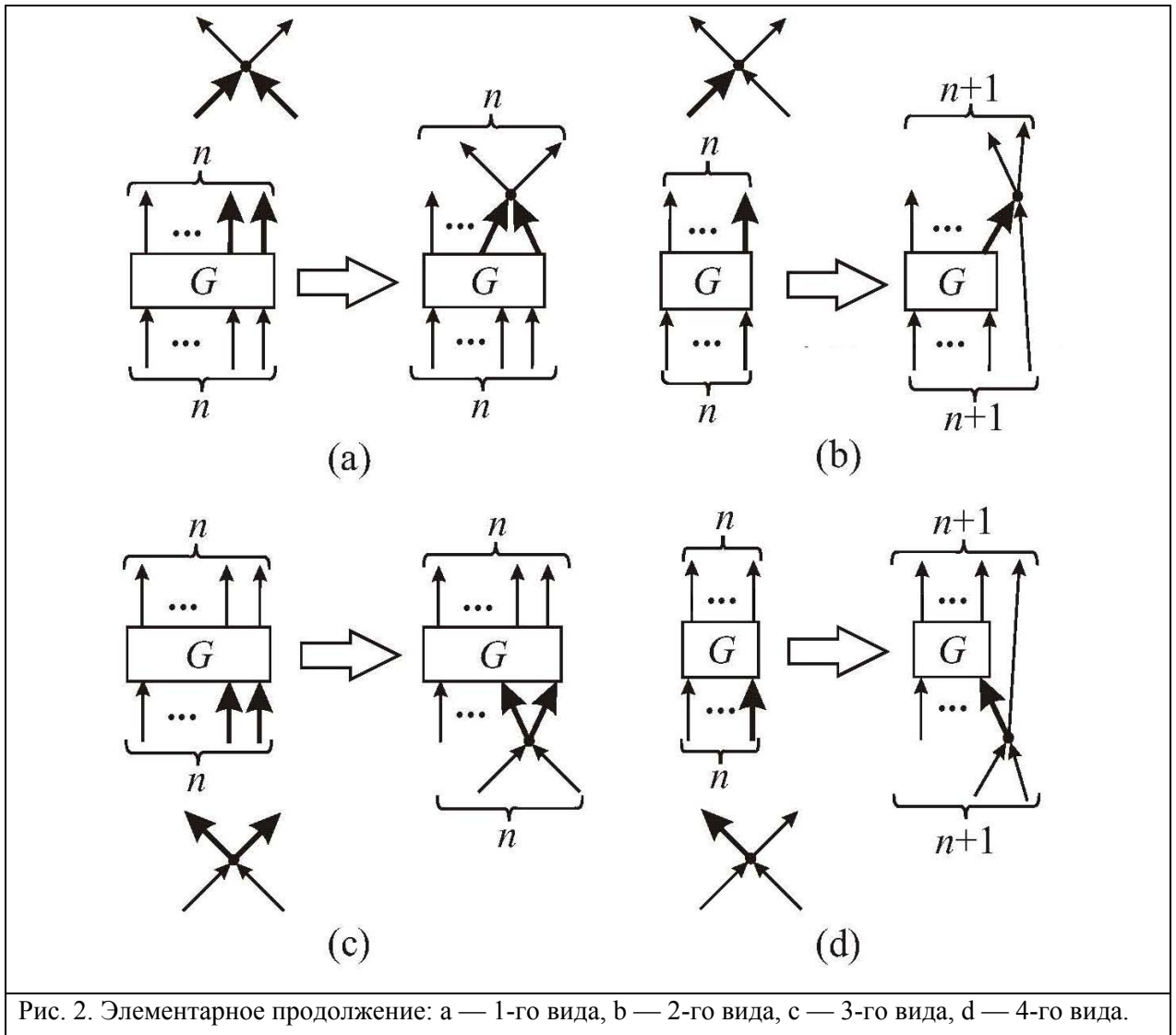


Рис. 2. Элементарное продолжение: а — 1-го вида, б — 2-го вида, с — 3-го вида, d — 4-го вида.

Первый вид продолжения графа заключается в добавлении новой вершины к двум выходящим внешним ребрам (рисунок 2а). Граф  $G$  изображен прямоугольником. Фактически, он может иметь произвольную структуру. Внешние ребра, участвующие в элементарном продолжении, изображены выделено. При этом продолжении число  $n$  внешних ребер не меняется.

Второй вид продолжения графа заключается в добавлении новой вершины к одному выходящему внешнему ребру (рисунок 2б). При этом число  $n$  и выходящих и входящих внешних ребер увеличивается на единицу.

Имеются ещё два элементарных продолжения, симметричных к рассмотренным. Третий вид продолжения заключается в добавлении новой вершины к двум входящим внешним ребрам (рисунок 2с). При этом число  $n$  внешних ребер не меняется.

Четвертый вид продолжения графа заключается в добавлении новой вершины к одному входящему внешнему ребру (рисунок 2d). При этом число  $n$  и выходящих и входящих внешних ребер увеличивается на единицу.

Можно доказать, что любой конечный связный X-граф может быть построен в результате конечной последовательности элементарных продолжений этих четырех видов [6]. Таким образом, рассмотренные элементарные продолжения составляют полный набор операций, для которого должны быть сформулированы «законы динамики» в форме алгоритма порождения графа. Термин «динамика» далее используется только в этом смысле.

При интерпретации возникающего X-графа как модели физического процесса элементарные продолжения первого и второго видов соответствуют порождению будущего хода процесса, а элементарные продолжения третьего и четвертого видов соответствуют реконструкции прошлого хода процесса, который причинностно связан с будущим.

Предлагаемая динамика предполагается стохастической. Законы динамики позволяют вычислить только вероятности различных вариантов добавления новой вершины.

#### 4. Амплитуда связи

Имеется значительный произвол в выборе зависимости вероятности добавления новой вершины от структуры существующего графа. Рассмотрим вариант этой зависимости, непосредственно связанный с бинарной структурой рассматриваемого графа. Предварительно введем понятие *амплитуды связи*.

Рассмотрим ориентированный маршрут в графе (рисунок 3). Он начинается в некоторой вершине с номером  $\alpha$  и заканчивается некоторым выходящим внешним ребром с номером  $i$ . Здесь и ниже вершины будут нумероваться греческими индексами, а внешние ребра - латинскими индексами. При этом номера вершин пробегает значения от 1 до  $N$ , где  $N$  – число вершин в графе, а номера, как входящих, так и выходящих внешних ребер пробегает значения от 1 до  $n$ , где  $n$  — ширина графа (число входящих или выходящих внешних ребер, т. е. число внешних ребер одного направления).

Выбор ориентированного маршрута означает, что мы последовательно в каждой вершине маршрута выбираем один из двух вариантов его возможного продолжения. Постулируем, что это равновероятный выбор, который не зависит от структуры графа. Это центральный постулат, на котором основан рассматриваемый вариант динамики последовательного роста. Таким образом, если ориентированный маршрут содержит  $k$  вершин, то вероятность его выбора равна  $2^{-k}$ . Аналогично, можно рассмотреть противоположно ориентированный маршрут, который заканчивается внешним входящим ребром.

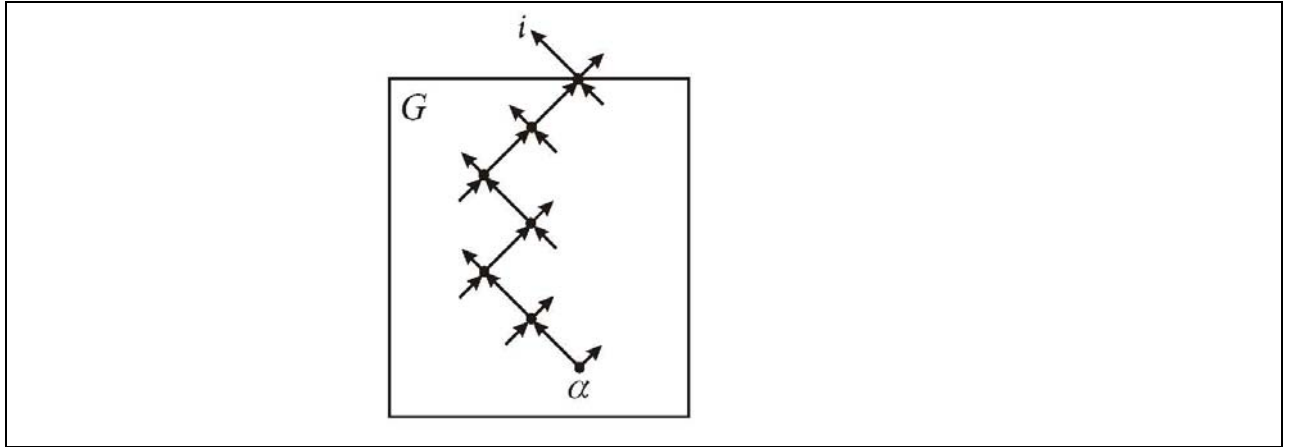


Рис. 3. Ориентированный маршрут как последовательность бинарных выборов.

Введем амплитуду  $a_{(f)ia}$  связи вершины номер  $\alpha$  и внешнего выходящего ребра номер  $i$ . По определению она равна сумме вероятностей всех ориентированных маршрутов из вершины номер  $\alpha$  во внешнее выходящее ребро номер  $i$ .

$$\alpha_{(f)ia} = \alpha_{(f)ai} = \sum_{m=1}^M 2^{-k(m)}, \quad (1)$$

где индекс  $m$  нумерует ориентированные маршруты из вершины номер  $\alpha$  во внешнее ребро номер  $i$ ,  $M = M_f(\alpha, i)$  число этих ориентированных маршрутов, а  $k(m)$  — число вершин в маршруте номер  $m$ , включая вершину номер  $\alpha$ . Эта амплитуда является неотрицательным числом не больше единицы. Она имеет ясный смысл. Связь тем сильнее, чем больше ориентированных маршрутов, и чем эти маршруты короче.

Аналогично, введем амплитуду  $a_{(p)ia}$  связи вершины номер  $\alpha$  и внешнего входящего ребра номер  $i$ . По определению, для  $M = M_p(\alpha, i)$

$$\alpha_{(p)ia} = \alpha_{(p)ai} = \sum_{m=1}^M 2^{-k(m)} \quad (2)$$

Ниже амплитуды связей для краткости будут просто называться амплитудами.

### 5. Алгоритм вычисления вероятностей

Рассмотрим алгоритм вычисления вероятностей элементарных продолжений, основанный на амплитудах. Он состоит из трех шагов. Далее термин «нечто выбирается с указанными вероятностями» означает, что выбор осуществляется вероятностно независимо в совокупности от всех введённых и реализованных ранее случайных величин.

На первом шаге выбирается элементарное продолжение по ориентации ребер (в будущее), или против ориентации (в прошлое). Предполагается симметрия направления процесса. Поэтому определим этот выбор как равновероятный с вероятностями, равными  $\frac{1}{2}$ , независимо от топологии графа.

На втором шаге равновероятно выбирается вершина «лидер». Обозначим ее номер через  $\alpha$ . Этот выбор осуществляется с вероятностями, равными  $1/N$ , где  $N$  – число вершин графа.

На третьем шаге выбираются два внешних ребра, к которым присоединяется новая вершина. Если на первом шаге выбрано продолжение по ориентации ребер, то это выходящие внешние ребра. Иначе – это входящие внешние ребра. По определению выбор внешнего выходящего ребра номер  $i$  делается с вероятностью  $\alpha_{(f)i\alpha}$ , а выбор внешнего входящего ребра номер  $i$  делается с вероятностью  $\alpha_{(p)i\alpha}$ .

Для вероятности  $p_{(f)ij}$  добавления новой вершины к внешним выходящим ребрам с номерами  $i$  и  $j$  получаем следующее выражение

$$p_{(f)ij} = \frac{1}{2N} \sum_{\alpha=1}^N \alpha_{(f)i\alpha} \alpha_{(f)\alpha j} \quad (3)$$

Отметим, что при перестановке номеров ребер  $i$  и  $j$  мы получаем то же элементарное продолжение. Таким образом, при неравных номерах  $i$  и  $j$  итоговая вероятность элементарного продолжения первого вида равна удвоенному выражению (3), так как величина  $p_{(f)ij}$  симметрична относительно перестановки индексов.

Аналогично, для вероятности  $p_{(p)ij}$  добавления новой вершины к внешним входящим ребрам с номерами  $i$  и  $j$  получаем следующее выражение

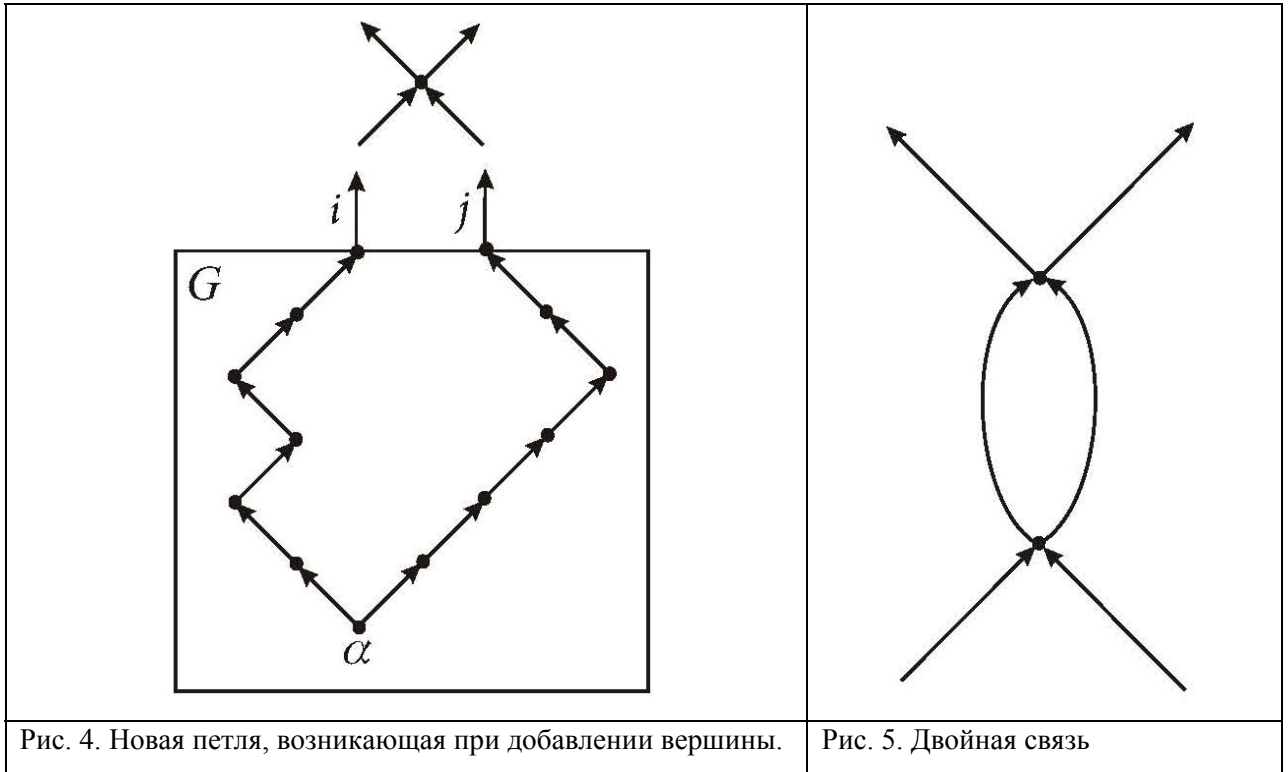
$$p_{(p)ij} = \frac{1}{2N} \sum_{\alpha=1}^N \alpha_{(p)i\alpha} \alpha_{(p)\alpha j} \quad (4)$$

Если номера  $i$  и  $j$  совпадают, то по определению это вероятность добавления вершины к одному внешнему ребру, то есть это элементарное продолжение второго, или четвертого вида (для внешних выходящих, или входящих ребер соответственно). В этом случае удвоения величин  $p_{(f)ii}$  и  $p_{(p)ii}$  не происходит.

Вероятности элементарных продолжений нормированы на 1. Сумма по  $i$  амплитуд  $\alpha_{(f)i\alpha}$  равна 1, так как обязательно выбирается какой-то ориентированный маршрут. Суммируя (3) или (4) по  $i$  и  $j$  получаем под знаком суммы 1. Сумма  $N$  единиц равна  $N$ . Сумма по всем внешним выходящим или входящим ребрам равна  $1/2$ . Итого сумма вероятностей всех путей равна 1.

Рассмотрим смысл этого определения. При добавлении новой вершины к выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$  образуются новые неориентированные циклы. Рассмотрим циклы специального вида, состоящие из двух ориентированных маршрутов (рисунок 4). Назовем такие циклы петлями. Припишем каждой петле вес, равный произведению вероятностей составляющих ее ориентированных маршрутов до присоединения новой вершины. Тогда сумма

петель, образованных новой вершиной, присоединенной к выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$ , и начинающихся в вершине номер  $\alpha$ , равна  $a_{(f)ia}a_{(f)\alpha j}$ . Сумма всех петель, образованных добавлением новой вершины, получается суммированием по  $\alpha$ . В итоге мы получаем определение (3). Как уже отмечалось выше, при неравных номерах  $i$  и  $j$  петли учитываются дважды.



Уравнения (3) и (4) можно записать в матричной форме. Рассмотрим следующие матрицы. Квадратная симметричная матрица  $\mathbf{p}_f$  вероятностей по ориентации (в будущее) размера  $n$ . Ниже все матрицы будут обозначаться латинскими буквами жирным шрифтом. Ее элементами являются величины  $p_{(f)ij}$ , где  $i$  и  $j$  являются номерами внешних выходящих ребер. Квадратная симметричная матрица  $\mathbf{p}_p$  вероятностей против ориентации (в прошлое) размера  $n$ . Ее элементами являются величины  $p_{(p)ij}$ , где  $i$  и  $j$  являются номерами внешних входящих ребер. Прямоугольная матрица  $\mathbf{a}_f$  амплитуд по ориентации (в будущее) размера  $(n, N)$ . Ее элементами являются амплитуды  $a_{(f)ia}$ , где номер строки  $i$  является номером внешнего выходящего ребра, а номер столбца  $\alpha$  является номером вершины. Прямоугольная матрица  $\mathbf{a}_p$  амплитуд против ориентации (в прошлое) размера  $(n, N)$ . Ее элементами являются амплитуды  $a_{(p)ia}$ , где номер строки  $i$  является номером внешнего входящего ребра, а номер столбца  $\alpha$  является номером вершины. Уравнения (3) и (4) соответственно для внешних выходящих и входящих ребер в матричной форме имеет вид



$$\mathbf{p}_f = \frac{1}{2N} \mathbf{a}_f \mathbf{a}_f^T \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_p = \frac{1}{2N} \mathbf{a}_p \mathbf{a}_p^T \quad (6)$$

Отметим, что в каждой матрице вероятностей сумма всех элементов равна  $1/2$ , что соответствует нормировке. В матрицах амплитуд сумма элементов каждого столбца равна  $1$ , а сумма всех элементов равна  $N$ .

## 6. Алгоритм вычисления матриц амплитуд

Вероятности всех элементарных продолжений любого графа можно получить, если известны матрицы амплитуд этого графа. Рассмотрим итерационный алгоритм вычисления матриц амплитуд.

Граф, состоящий из одной вершины, имеет ширину  $2$  (рисунок 1). Обозначим его  $G_{1,2}$ . Для его матриц амплитуд  $\mathbf{a}_f(G_{1,2})$  и  $\mathbf{a}_p(G_{1,2})$  имеем

$$\mathbf{a}_f(G_{1,2}) = \mathbf{a}_p(G_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Рассмотрим граф  $G_{N,n}$  ширины  $n$ , состоящий из  $N$  вершин. Пусть для него известны матрицы  $\mathbf{a}_f(G_{N,n})$  и  $\mathbf{a}_p(G_{N,n})$ . Рассчитаем новые матрицы амплитуд при каждом из четырех видов элементарных продолжений.

Рассмотрим элементарное продолжение первого вида (рисунок 2a). При добавлении вершины к двум выходящим внешним ребрам с номерами  $i$  и  $j$  ширина графа не меняется. Два выходящих внешних ребра становятся внутренними ребрами, и возникают два новых выходящих внешних ребра. Присвоим новым выходящим внешним ребрам те же номера  $i$  и  $j$ . Не имеет значения, какой номер присвоить какому из новых выходящих внешних ребер, так как эти ребра эквивалентны. При этом каждая строка с номерами  $i$  и  $j$  новой матрицы  $\mathbf{a}_f(G_{N+1,n})$  равна среднему арифметическому строк с номерами  $i$  и  $j$  исходной матрицы  $\mathbf{a}_f(G_{N,n})$ . Для элементов этих двух строк имеем

$$a_{(f)i\alpha}(G_{N+1,n}) = a_{(f)j\alpha}(G_{N+1,n}) = \frac{1}{2} \left( a_{(f)i\alpha}(G_{N,n}) + a_{(f)j\alpha}(G_{N,n}) \right), \quad (8)$$

где индексы  $i$  и  $j$  фиксированы, а индекс  $\alpha$  пробегает значения от  $1$  до  $N$ . Кроме того, к  $\mathbf{a}_f(G_{N,n})$  добавляется новый столбец номер  $N+1$ . Соответствующая ему новая вершина связана только с новыми внешними выходящими ребрами с номерами  $i$  и  $j$ . При этом с каждым только одним ориентированным маршрутом, состоящим из одной вершины (это сама новая вершина).

Следовательно, все элементы нового столбца равны нулю, кроме элементов с номерами  $i$  и  $j$ , которые равны  $1/2$ . Получаем

$$a_{(f)i(N+1)}(G_{N+1,n}) = a_{(f)j(N+1)}(G_{N+1,n}) = 1/2 \quad (9)$$

$$a_{(f)s(N+1)}(G_{N+1,n}) = 0 \quad (10)$$

где индекс  $s$  пробегает все значения от 1 до  $n$ , кроме  $i$  и  $j$ .

Все элементы матрицы  $\mathbf{a}_p(G_{N,n})$  не меняются, так как не меняются внешние входящие ребра. Но к  $\mathbf{a}_p(G_{N,n})$  добавляется столбец номер  $N+1$ . Обозначим через  $\beta$  и  $\gamma$  номера вершин, которым в графе  $G_{N,n}$  инцидентны внешние выходящие ребра с номерами  $i$  и  $j$ . Тогда новый столбец равен среднему арифметическому столбцов с номерами  $\beta$  и  $\gamma$ . Получаем

$$a_{(p)s(N+1)}(G_{N+1,n}) = \frac{1}{2}(a_{(p)s\beta}(G_{N,n}) + a_{(p)s\gamma}(G_{N,n})), \quad (11)$$

где индекс  $s$  пробегает значения от 1 до  $n$ .

Рассмотрим элементарное продолжение второго вида (рисунок 2b). При добавлении вершины к одному выходящему внешнему ребру с номером  $i$  ширина графа увеличивается на 1. Одно выходящее внешнее ребро становится внутренним ребром, и возникают два новых выходящих внешних ребра и одно новое входящее внешнее ребро. Присвоим одному новому выходящему внешнему ребру номер  $i$ . Не имеет значения, какому из новых выходящих внешних ребер номер присвоить, так как эти ребра эквивалентны. Оставшемуся выходящему внешнему ребру присвоим номер  $n+1$ . Входящему внешнему ребру также присвоим номер  $n+1$ . При этом все элементы строки с номером  $i$  новой матрицы  $\mathbf{a}_f(G_{N+1,n+1})$  равны элементам этой строки матрицы  $\mathbf{a}_f(G_{N,n})$ , деленным на 2, и им равны элементы строки с номером  $n+1$ .

$$a_{(f)i\alpha}(G_{N+1,n+1}) = a_{(f)(n+1)\alpha}(G_{N+1,n+1}) = \frac{1}{2}a_{(f)i\alpha}(G_{N,n}), \quad (12)$$

где индекс  $i$  фиксирован, а индекс  $\alpha$  пробегает значения от 1 до  $N$ . Кроме того, к  $\mathbf{a}_f(G_{N,n})$  добавляется новый столбец номер  $N+1$ . В столбце с номером  $N+1$  элементы с номерами  $(i, N+1)$  и  $(n+1, N+1)$  равны  $1/2$ , а остальные элементы этого столбца равны нулю.

Имеем

$$a_{(f)i(N+1)}(G_{N+1,n+1}) = a_{(f)(n+1)(N+1)}(G_{N+1,n+1}) = 1/2, \quad (13)$$

$$a_{(f)s(N+1)}(G_{N+1,n+1}) = 0 \quad (14)$$

где индекс  $i$  фиксирован, а индекс  $s$  пробегает значения от 1 до  $i-1$  и от  $i+1$  до  $n$ .

Все элементы матрицы  $\mathbf{a}_p(G_{N,n})$  не меняются, так как не меняются внешние входящие ребра. Но к  $\mathbf{a}_p(G_{N,n})$  добавляются строка номер  $n+1$  и столбец номер  $N+1$ . Обозначим через  $\beta$  номер вершины, которой в графе  $G_{N,n}$  инцидентно внешнее выходящее ребро номер  $i$ . Все элементы нового столбца номер  $N+1$  от строки номер 1 до строки номер  $n$  равны элементам столбца с номером  $\beta$ , деленным на 2. Получаем

$$a_{(p)s(N+1)}(G_{N+1,n+1}) = \frac{1}{2} a_{(p)s\beta}(G_{N,n}), \quad (15)$$

где индекс  $s$  пробегает значения от 1 до  $n$ . Все элементы новой строки номер  $n+1$  равны нулю, кроме элемента номер  $N+1$ , который равен  $1/2$ .

$$a_{(p)(n+1)\gamma}(G_{N+1,n+1}) = 0, \quad (16)$$

$$a_{(p)(n+1)(N+1)}(G_{N+1,n+1}) = \frac{1}{2}, \quad (17)$$

где индекс  $\gamma$  пробегает значения от 1 до  $N$ .

Элементарные продолжения третьего и четвертого вида полностью симметричны рассмотренным. Для элементарного продолжения третьего вида (рисунок 2с) справедливы формулы (8) – (11) с точностью до перестановки индексов ( $f$ ) и ( $p$ ). Аналогично, для элементарного продолжения четвертого вида (рисунок 2d) справедливы формулы (12) – (17) с точностью до перестановки индексов ( $f$ ) и ( $p$ ).

Построенный алгоритм позволяет рассчитать матрицу амплитуд любого графа. Он может быть удобен для численного моделирования. Отметим, что каждый маршрут представлен двоичным числом  $2^{-k}$ , в котором все разряды нулевые кроме одного. Все остальные величины получаются операциями сложения и умножения с этими двоичными числами. Численное моделирование рассмотренного роста графа целесообразно выполнять в двоичном исчислении.

## 7. Свойства алгоритма

Рассмотрим свойства предлагаемого алгоритма роста графа.

Из рассмотренного в предыдущем параграфе алгоритма построения матриц амплитуд следует, что элемент матрицы амплитуд не может превышать  $1/2$ .

**Теорема 7.1.** Максимально возможная вероятность элементарного продолжения первого и третьего вида равна  $1/4$ . Максимально возможная вероятность элементарного продолжения второго и четвертого вида равна  $1/8$ .

**Доказательство.** Элемент матрицы вероятностей равен произведению двух строк матрицы амплитуд. Элемент матрицы амплитуд не больше  $1/2$ , а число элементов в строке равно  $N$ . Итого сумма элементов строки матрицы амплитуд не больше  $N/2$ . При перемножении двух

строк каждый элемент умножается не более чем на максимальный элемент  $1/2$ . Итого элемент матрицы вероятностей, равный произведению двух строк матрицы амплитуд, не превышает  $N/4$ . Вероятности элементарных продолжений первого и третьего вида равны сумме двух элементов матрицы вероятностей, умноженных на  $1/(2N)$ . Таким образом, они не превышают  $1/4$ . Вероятности элементарных продолжений второго и четвертого вида равны элементу матрицы вероятностей, умноженному на  $1/(2N)$ . Таким образом, они не превышают  $1/8$ . □

Простейшим примером с максимальными значениями вероятностей элементарных продолжений является рост графа, состоящего из одной вершины (рисунок 1). Имеется одно элементарное продолжение первого вида с вероятностью  $1/4$  и одно элементарное продолжение третьего вида с вероятностью  $1/4$ . Оба эти продолжения заключаются в образовании особой петли — двойного ребра (рисунок 5).

Имеется по два элементарных продолжения второго и четвертого вида с вероятностью  $1/8$  каждое. Они заключаются в добавлении новой вершины к одному из двух внешних соответственно выходящих или входящих ребер.

Особый интерес представляет образование структур в процессе последовательного роста. По этому поводу можно высказать следующее предварительное замечание. Предлагаемый алгоритм в среднем сохраняет пропорции между слабосвязанными подграфами. Слабая связь в данном случае является качественной характеристикой, означающей, что имеется мало маршрутов, соединяющих подграфы. Рассмотрим граф, состоящий из двух слабосвязанных подграфов. В пределе — это два несвязанных подграфа. Пусть они состоят, соответственно, из  $N_1$  и  $N_2$  вершин. Тогда вероятность добавления новой вершины к первому подграфу равна  $N_1 / (N_1 + N_2)$ , а ко второму подграфу равна  $N_2 / (N_1 + N_2)$ . В среднем отношение числа вершин в подграфах сохраняется в процессе последовательного роста. Однако, эта пропорция не устойчива. При случайном изменении пропорции алгоритм не имеет тенденции восстанавливать исходную пропорцию.

## 8. Причинность

Интерпретация графа как модели некоторого процесса требует выполнения принципа причинности. Рассмотрим некоторую вершину номер  $\alpha$ . По определению подмножество вершин графа, из которых имеется ориентированный маршрут в вершину номер  $\alpha$ , является прошлым вершины номер  $\alpha$ . Аналогично, подмножество вершин графа, в которые имеется ориентированный маршрут из вершины номер  $\alpha$ , является будущим вершины номер  $\alpha$ . Соответственно, оставшиеся вершины графа составляют подмножество вершин, причинно не связанных с вершиной номер  $\alpha$ .

Принцип причинности может быть сформулирован следующим образом. Вероятность добавления новой вершины в будущее зависит только от структуры ее прошлого. Аналогично, вероятность добавления новой вершины в прошлое зависит только от структуры ее будущего. Другие части графа влияют только на коэффициент нормировки вероятности. Смысл этого определения очевиден. Будущее предсказывается по причинам в прошлом, а прошлое реконструируется по следствиям в будущем. Строгое определение этого свойства будет дано в разделе 9. Рассмотренный алгоритм по построению удовлетворяет принципу причинности, аналогично алгоритму, рассмотренному в работах [4,5]. Однако, рассмотренный алгоритм удовлетворяет еще одному условию.

**Теорема 8.1.** Вероятность добавления к графу конфигурации из нескольких вершин, которые попарно не находятся в подграфах прошлого и будущего друг у друга, не зависит от порядка их добавления.

**Доказательство.** Рассмотрим добавление двух вершин. Первая вершина добавляется к внешним выходящим ребрам, которые инцидентны вершинам  $\alpha$  и  $\beta$  исходного графа  $G$ , а вторая вершина добавляется к внешним выходящим ребрам, которые инцидентны вершинам  $\gamma$  и  $\delta$  исходного графа  $G$  (рисунок 6). Некоторые из вершин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  могут совпадать. В процессе последовательного роста эти вершины могут добавляться в двух последовательностях: сначала первая вершина, а затем вторая и наоборот. Вероятность добавления двух вершин равна произведению вероятностей добавления каждой вершины. Вероятность добавления вершины состоит из произведения элемента матрицы вероятностей на коэффициент нормировки. Элементы матрицы вероятностей не зависят от порядка добавления вершин, так как одна новая вершина не попадает в прошлое другой. Коэффициент нормировки зависит только от числа вершин  $N$  в  $G$  и пропорционален  $1/N$  для вершины, добавляемой первой, и  $1/(N+1)$  для вершины, добавляемой второй, не зависимо от порядка добавления вершин. Следовательно, вероятности обеих последовательностей добавления вершин равны. Аналогичное свойство справедливо для внешних входящих ребер. Очевидно, что это свойство справедливо для произвольного числа добавляемых вершин.  $\square$

Отметим, что вероятность добавления одной вершины в будущее, а другой в прошлое также не зависят от порядка их добавления, если они не попадают соответственно в прошлое и в будущее друг друга. Этому свойству не удовлетворяет алгоритм, рассмотренный в работах [4,5], так как в нем коэффициент нормировки зависит от вида элементарного продолжения.

Рассмотренное свойство было предложено в работе [7] для другой модели последовательного роста, как ограничение на допустимый вид алгоритма, исходя из интерпретации модели, как модели дискретного пространства-времени в микромире. Рассмотренный алгоритм этому ограничению удовлетворяет.

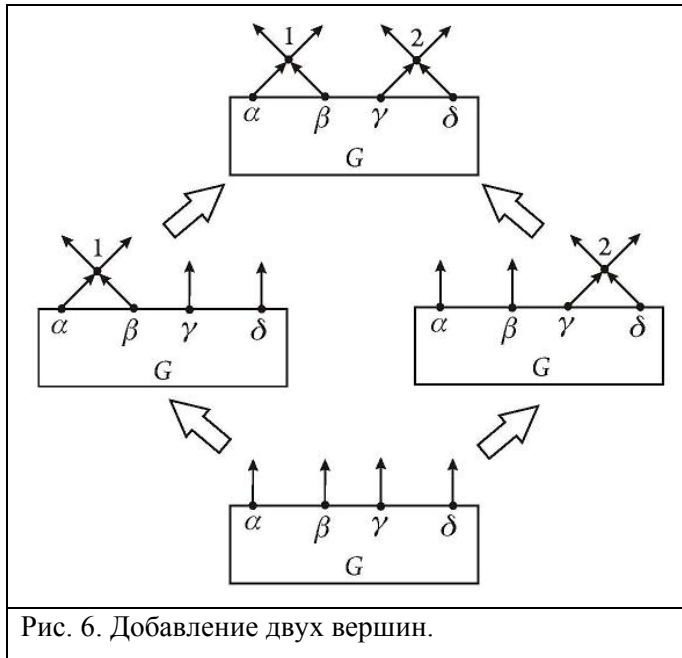


Рис. 6. Добавление двух вершин.

## 11. Заключение

Алгоритмы последовательного роста графа, как рассмотренные в настоящей работе, так и рассмотренный в работах [4,5,6], предлагаются как модели самоорганизации в дискретных структурах. Но в них непосредственно не закладывается возможность самоорганизации структур. Поэтому факт самоорганизации должен исследоваться дополнительно. В работе [5] представлены результаты численного моделирования, которые свидетельствуют о наличии самоорганизации. Важно, что для рассмотренных алгоритмов удаётся доказать наличие у свойств, необходимых для моделирования физических структур. Первоначально рост X-графа интерпретировался как модель формирования информации о структуре пространства-времени при наблюдении динамики элементарных частиц в микромире. Но возможны и другие приложения этой методики к моделированию динамики самоорганизующихся систем.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 10-01-00041а, и Российского гуманитарного научного фонда, проект 11-03-00035а.

## Литература

1. Вяльцев А. Н. Дискретное пространство-время. М.: Наука, 432 с., 1965.  
Vyalcev A. N. Moscow, "Nauka", 1965. 432 s.
2. 't Hooft, G. Quantum gravity: a fundamental problem and some radical ideas, in Recent Development in Gravitation, Proceedings of the 1978 Cargese Summer Institute, ed. by M. Levy and S. Deser (Plenum, New York/London 1979), p. 323-345.  
't Hooft, G. Proceedings of the 1978 Cargese Summer Institute, ed. by M. Levy and S. Deser (Plenum, New York/London 1979), p. 323-345.
3. Myrheim, J. Statistical Geometry. CERN preprint TH-2538, 1978, 13 p.

Myrheim, J. CERN preprint TH-2538, 1978, 13 p.

4. Krugly, A. L. A sequential growth dynamics for a directed acyclic dyadic graph, arXiv: 1112.1064 [gr-qc].

Krugly, A. L. arXiv: 1112.1064 [gr-qc].

5. Krugly, A. L. and Stepanian, I. V. An example of the stochastic dynamics of a causal set, in Foundations of Probability and Physics – 6, Växjö-Kalmar, Sweden, 14-16 June 2011, AIP Conference Proceedings, V. 1424, edited by Mauro D'Ariano, Shao-Ming Fei, Emmanuel Haven, Beatrix Hiesmayr, Gregg Jaeger, Andrei Khrennikov, and Jan-Åke Larsson, (2012), pp. 206 -210 (arXiv: 1111.5474 [gr-qc]).

Krugly, A. L. and Stepanian, I. V. 6, Växjö-Kalmar, Sweden, 14-16 June 2011, AIP Conference Proceedings, V. 1424, edited by Mauro D'Ariano, Shao-Ming Fei, Emmanuel Haven, Beatrix Hiesmayr, Gregg Jaeger, Andrei Khrennikov, and Jan-Åke Larsson, (2012), pp. 206 -210 (arXiv: 1111.5474 [gr-qc]).

6. Krugly, A. L. Discrete mechanics: a kinematics for a particular case of causal sets, arXiv: 1008.5169 [gr-qc].

Krugly, A. L. arXiv: 1008.5169 [gr-qc].

7. Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. A classical sequential growth dynamics for causal sets. *Phys. Rev. D*61, 2000, p. 024002-1 - 024002-16 (arXiv: gr-qc/9904062).

Rideout, D. P. and Sorkin, R. D. *Phys. Rev. D*61, 2000, p. 024002-1 - 024002-16 (arXiv: gr-qc/9904062).

8. М. Лоэв. Теория вероятностей. М., «Иностранная литература», 1962, 720с. (перевод).

Michel Loeve. Probability Theory. Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand Company inc.

Michel Loeve. Princeton, New Jersey, D. Van Nostrand Company inc. 720s.